תת-אלגברות קרטן

g אלגברת לי ממימד סופי מעל (ב.ה.כ) $k=\mathbb{C}$.

נזכיר שלכל תת-אלגברה $h<g$

המנרמל של h ב-g = $N_g(h)=\{x\in g \mid [x,h]\subset h\}$

זוהי התת-אלגברה המקסימלית של g שבה h אידיאל.

הגדרה: תת אלגברה $h<g$ נקראת תת-אלגברת קרטן של g אם:

(1) h נילפוטנטית:

(2) $N_g(h)=h$.

בפרק זה נוכיח קיום של תת-אלגברות קרטן ונראה שכולן צמודות.

לכל $x\in g$ נסמן

הפולינום האופייני של ad_x = $p_x(T)=\det(T-ad_x)$

אם $n=\dim g$ אז $p_x(T)=\sum_{i=0}^{n} a_i(x)T^i\in\mathbb{C}[T]$.

אם נקבע בסיס של g, כך ש- $[x]=(x_1,\dots,x_n)$ וקטור הקואורדינטות של x בבסיס הזה, אז $a_i(x_1,\dots,x_n)$ היא פונקציה פולינומיאלית של n משתנים, ויתר על כן, $a_i(x_1,\dots,x_n)$ פולינום הומוגני מדרגה $n-i$ במשתנים $x_1,\dots,x_n$.

הגדרה: ה<u>דרגה</u> (rank) של g היא המספר הטבעי הקטן ביותר כך שהפונקציה a_l אינה זהותית אפס.

איבר $x \in g$ נקרא <u>רגולרי</u> אם $a_l(x) \neq 0$.

נסמן ב- $g_r \subset g$ את אוסף האיברים הרגולריים ב- g.

הערה: כיוון ש- $a_n = 1$ נקבל ש- $l \leq n$, וכן $l = n$ אמ"מ g נילפוטנטית. בנוסף, לכל $x \in g$, $ad_x(x) = 0$, ולכן אם $g \neq 0$ אז $a_0 = 0$ ולכן $l \geq 1$.

טענה: g_r קשירה, צפופה ופתוחה ב- g.

הוכחה: $g_r = g \setminus U$ כאשר U קבוצת האפסים של a_l, ולכן g_r <u>פתוחה</u>.
אם הפנים של U <u>לא ריק</u> אז a_l מתאפס על קבוצה פתוחה ולכן כל נגזרותיה
ולכן $a_l \equiv 0$ בסתירה לכך ש- l היא דרגת g.

<u>קשירות</u>: אם $x,y \in g_r$ אז הישר (המרוכב) L המחבר אותן פוגש את U
רק במספר סופי של נקודות (כי $L \cap U$ קבוצה אלגברית ב- $L \cong \mathbb{C}$ שאינה
כל $\mathbb{C}$, ולכן כתת-קבוצה סגורה זריצקי של $\mathbb{C}$ יש בה מספר סופי של נקודות).
מכאן $L \cap g_r \cong \mathbb{C} \setminus \{v_1, \dots, v_n\}$ קשירה, ולכן x,y נמצאים באותו מרכיב קשירות
של g_r. כיוון שהם שרירותיים g_r קשירה $\square$

תת אלגברת קרטן הקשורה לאבר רגולרי.

אם $x \in \mathfrak{g}$ אפשר לפרק את $\mathfrak{g}$ למרחבים עצמיים מוכללים $\mathfrak{g}_x^\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{C})$

$$\mathfrak{g}_x^\lambda = \{ y \in \mathfrak{g} \mid (ad_x - \lambda)^j (y) = 0 \ , \ j >> 0 \}$$

בפרט, המרחב $\mathfrak{g}_x^0$ הוא מרחב ההתאפסות של ad_x, והמימד שלו הוא בדיוק

הריבוי האלגברי של 0 כערך עצמי של ad_x. מכאן

$$P_x(T) = T^{\dim \mathfrak{g}_x^0} \prod_{\lambda \neq 0} (T - \lambda)$$

לכן, בהגדרת l: $l = \dim \mathfrak{g}_x^0$.

טענה: אם $x \in \mathfrak{g}$ אז

(1) $$\mathfrak{g} = \bigoplus_\lambda \mathfrak{g}_x^\lambda$$

(2) $$[\mathfrak{g}_x^\lambda, \mathfrak{g}_x^\mu] \subset \mathfrak{g}_x^{\lambda+\mu} \ , \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

(3) $\mathfrak{g}_x^0$ היא תת-אלגברה של $\mathfrak{g}$.

הוכחה: (1) אלגברה לינארית. (2) הוכחנו. (3) נובע מ-(2). $\square$

משפט: אם $x \in \mathfrak{g}$ רגולרי, אז $\mathfrak{g}_x^0$ היא תת-אלגברת קרטן של $\mathfrak{g}$ ולמימדה $\mathrm{rank}(\mathfrak{g})$.

הוכחה: תחילה נראה ש-$\mathfrak{g}_x^0$ נילפוטנטית. ממשפט Engel מספיק להראות שלכל $y \in \mathfrak{g}$ הצמצום של ad_y ל-$\mathfrak{g}_x^0$ נילפוטנטי.

נסמן $ad_y^1 := ad_y|_{g_x^0} : g_x^0 \to g_x^0$

$$ad_y^2 := ad_y|_{g_x/g_x^0} : g/g_x^0 \to g/g_x^0$$

וכן $\mathcal{U} = \{ y \in g_x^0 \mid ad_y^1 \text{ אינו נילפוטנטי} \}$

$$V = \{ y \in g_x^0 \mid ad_y^2 \text{ הפיך} \}$$

הקבוצות $\mathcal{U}, V$ פתוחות ב- g_x^0 (כי הן מוגדרות ע"י תנאי פתוח).

$V \neq \emptyset$ כי $x \in V$, וקבוצות זריסקי פתוחות הן צפופות ולכן V צפופה ב-g_x^0.

נראה ש-$\mathcal{U} = \emptyset$. אם לא, נניח ש-$\mathcal{U} \cap V \neq \emptyset$ וניקח $y \in \mathcal{U} \cap V$.

כיוון ש-$y \in \mathcal{U}$, הריבוי של הע"ע 0 ב-ad_y^1 קטן ממש מ-$l = \dim g_x^0 = rank(g)$.

מצד שני, כיוון ש-$y \in V$, 0 אינו ע"ע של ad_y^2.

לכן, הריבוי של 0 כע"ע של ad_y קטן ממש מ-l בסתירה להגדרת l.

אם כן, $\mathcal{U} = \emptyset$, ו-g_x^0 אלגן נילפוטנטית.

נותר להראות ש-$N_g(g_x^0) = g_x^0$. יהי $z \in N_g(g_x^0)$, כלומר $ad_z(g_x^0) \subset g_x^0$.

בפרט $[z,x] \in g_x^0$ ומהגדרת g_x^0 יש $j \in \mathbb{N}$ כך ש

$$ad_x^j([z,x]) = -ad_x^{j+1}(z) = 0$$

מכאן $z \in g_x^0$ $\square$

משפט: כל תת-אלגברות קרטן של $\mathfrak{g}$ שקולות. בפרט לכולן אותו מימד.

(לא נוכיח בשלב זה)

המקרה הפשוט למחצה

משפט: תהא $\mathfrak{g} > \mathfrak{h}$ תת-אלגברת קרטן של אלגברת לי פשוטה למחצה $\mathfrak{h}$.

אז (1) הצמצום של תבנית קילינג של $\mathfrak{g}$ ל- $\mathfrak{h}$ אינו מנוון.

(2) $\mathfrak{h}$ אבלית.

(3) $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ (המרכז של $\mathfrak{h}$ ב- $\mathfrak{g}$)

(4) כל איבר ב- $\mathfrak{h}$ הינו פשוט למחצה.

הוכחה:

(1) לפי המשפט הקודם קיים $x \in \mathfrak{g}_r$ כך ש- $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_x^0$. נרשום

(הפירוק של $\mathfrak{g}$ ביחס לפעולת ad_x) $$ad_x \circlearrowright \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_x^0 \oplus \sum_{\lambda \neq 0} \mathfrak{g}_x^\lambda$$

נשים לב שאם B תבנית קילינג של $\mathfrak{g}$ אז

$$\lambda + \mu \neq 0 \Rightarrow \mathfrak{g}_x^\lambda \perp \mathfrak{g}_x^\mu$$

אכן, אם $y \in \mathfrak{g}_x^\lambda$ ו- $z \in \mathfrak{g}_x^\mu$, אז

$$0 = B([x,y],z) + B(y,[x,z]) = (\lambda+\mu) B(y,z)$$

לכן, הפירוק הבא הוא פירוק למרחבים ניצבים

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_x^0 \oplus^\perp \left(\bigoplus^\perp_{\lambda\neq 0} \left(\mathfrak{g}_x^\lambda + \mathfrak{g}_x^{-\lambda} \right)\right)$$

B לא מנוונת $\Leftarrow$ הצמצום שלה לכל אחד מהמרכיבים בפירוק לא מנוון, בפרט על $\mathfrak{g}_x^0 = \mathfrak{h}$.

(2) נפעיל את קריטריון קרטן על $\mathfrak{h}$ (הנחנו שהיא נילפוטנטית ולכן פתירה)

$$B_{\mathfrak{h}}(y,z) = 0 \qquad \forall y\in \mathfrak{h},\ \forall z\in[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$$

כלומר, $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$ ניצב ל-$\mathfrak{h}$ ולכן $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]=(0)$, דהיינו $\mathfrak{h}$ אבלית.

(3) $\mathfrak{h}$ אבלית ולכן $\mathfrak{h} \subseteq C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

(4) יהי $x\in \mathfrak{h}$ כלשהו ויהי $x = s+n$ פירוק ז'ורדן המופשט, $s,n\in \mathfrak{g}$.

אם $y\in \mathfrak{h}$ אז $[y,x]=0$ (כי $\mathfrak{h}$ אבלית) ולכן גם $[y,s]=[y,n]=0$.

מכאן $s,n\in C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$. כיוון ש-$y$ ו-n מתחלפים ו-ad_n נילפוטנטי,

נקבל ש-$ad_y\circ ad_n$ נילפוטנטי ולכן $B(y,n)=Tr(ad_y\circ ad_n)=0$

קיבלנו ש-$\mathfrak{h} \perp n$ ולכן $n=0$, כלומר x פשוט למחצה. $\square$

מסקנה 1: $\mathfrak{h}$ היא תת-אלגברה אבלית מקסימלית.

מסקנה 2: כל איבר רגולרי ב-$\mathfrak{g}$ הוא פשוט למחצה.