שבוע 9

הצגות של אלגבראות לי פשוטות למחצה

בפרק זה נראה הצגות (ממימד סופי) של אלגבראות לי פשוטות למחצה, כלומר מורפיזם של אלגבראות לי. $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow End(V)$

כש- V מרחב וקטורי מעל שדה סגור אלגברית k ממציין אפס.

למעשה בלי הגבלת הכלליות אפשר לקחת $k = \mathbb{C}$.

מבוא: מהן ההצגות של $sl_2(\mathbb{C})$?

הגדרה: תהא $\mathfrak{g}$ אלגברת לי פשוטה למחצה.

$x \in \mathfrak{g}$ נקרא פשוט למחצה / נילפוטנטי אם $ad_x \in End(\mathfrak{g})$ פשוט למחצה / נילפוטנטי.

משפט 1: אם $\mathfrak{g}$ פשוטה למחצה אז לכל $x \in \mathfrak{g}$ יש פירוק יחיד $x = n+s$ עם $n, s \in \mathfrak{g}$ כך ש- $[n, s] = 0$, n נילפוטנטי ו- s פשוט למחצה.

פירוק זה נקרא פירוק ז'ורדן המופשט והוא מתלכד עם פירוק ז'ורדן הרגיל כש $\mathfrak{g} \subseteq End(V)$.

משפט 2: אם $\phi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$ מורפיזם של אלגבראות לי אז אם $x \in \mathfrak{g}_1$ פשוט למחצה או נילפוטנטי כך גם $\phi(x)$.

הגדרה: הצגה V של $\mathfrak{g}$ נקראת אי-פריקה אם אין לה תת הצגה $(0) \subsetneq W \subsetneq V$.

נחזור ל- $sl_2(k)$ ונמיין את ההצגות האי פריקות שלה. נסמן

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

נשים לב ש- ad_h פשוט לכסינה:

$$\begin{aligned} ad_h(h) &= [h,h] = 0 \\ ad_h(e) &= [h,e] = 2e \\ ad_h(f) &= [h,f] = -2f \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad [ad_h]_{\{h,e,f\}} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

לכן (משפט 2) לכל הצגה V ממימד סופי, $\rho : sl_2(\mathbb{C}) \to End(V)$ האופרטור $\rho(h)$ פשוט לכסינה. נרשום, אם כן,

$$\rho(h) \circlearrowright V = \bigoplus_{\lambda \in k} V_\lambda$$

הפירוק של V למרחבים עצמיים. (ה-λ-ים נקראים משקלות)

כיוון ש- $sl_2(k)$ פשוטה, ρ חח"ע ולכן נזהה את $sl_2(k)$ עם תמונתה ב- $End(V)$ ונרשום xv במקום $\rho(x)v$ $\forall v \in V, x \in sl_2(k)$.

למה: אם $v \in V_\lambda$ אז $ev \in V_{\lambda+2}$ ו- $fv \in V_{\lambda-2}$.

הוכחה: $h(ev) = [h,e]v + ehv = 2ev + \lambda ev = (\lambda+2)ev$

באופן דומה ל- f.

הגדרה: אם V הצגה של $sl_2(k)$ ו- $\lambda \in k$, נאמר שווקטור $\omega \in V$ הוא <u>פרימיטיבי</u> ממשקל λ אם $\omega \neq 0$ ומתקיים

$$\begin{cases} h\omega = \lambda\omega \\ e\omega = 0 \end{cases}$$

טענה: $\omega \in V$ פרימיטיבי $\Longleftrightarrow$ הישר שהוא פורש אינווריאנטי תחת תת-האלגברה $\mathfrak{b} = Sp\{h,e\}$.

הוכחה: $(\Leftarrow)$ ברור. $(\Rightarrow)$ נניח $\mathbb{C}\omega$ אינווריאנטי תחת $\mathfrak{b}$. אז

$$\begin{aligned} h\omega &= \lambda\omega \\ e\omega &= \mu\omega \end{aligned} \qquad \lambda,\mu \in k$$

אבל $[h,e] = 2e$ ולכן $\mu = Tr(e) = 0$. $\square$

מסקנה: בכל הצגה V ממימד סופי של $sl_2(k)$ יש וקטור פרימיטיבי.

הוכחה: $\mathfrak{b}$ פתירה ולכן, לפי משפט Lie, יש לה וקטור אינווריאנטי. $\square$

(דרך אחרת, שימו לב ש- $\mathfrak{b}$ היא האלגברת-לי היחידה ממימד 2 שאינה טריוויאלית)

משפט: תהא V הצגה של $sl_2(k)$ ו- $\omega \in V$ וקטור פרימיטיבי ממשקל λ.

נסמן $\omega_{-1} := 0$ ו $\omega_j := \frac{1}{j!} f^j \omega$ ל- $j \geq 0$. אז

$$h\omega_j = (\lambda - 2j)\,\omega_j \qquad (1)$$

$$f\omega_j = (j+1)\,\omega_{j+1} \qquad (2)$$

$$e\omega_j = (\lambda - j + 1)\,\omega_{j-1} \qquad (3)$$

הוכחה: (1) נובע מ- $hf\omega = (\lambda-2)f\omega$ ואינדוקציה.

(2) מיידי.

(3) באינדוקציה. $j=1$: $e\omega_1 = ef\omega = \underbrace{[e,f]}_{h}\omega + \underbrace{fe\omega}_{=0} = h\omega = \lambda\omega$

בצעד הכללי:

$$
\begin{aligned}
je\omega_j = ef\omega_{j-1} &= [e,f]\omega_{j-1} + fe\,\omega_{j-1} \\
&= h\omega_{j-1} + (\lambda-j+2)f\omega_{j-2} \\
&= \big((\lambda-2j+2) + (\lambda-j+2)(j-1)\big)\,\omega_{j-1} \\
&= j(\lambda-j+1)\,\omega_{j-1}
\end{aligned}
$$

Δ

מסקנה: תתכנה שתי אפשרויות

(a) $\{\omega_j\}_{j\geq 0}$ כולם בת"ל.

(b) $\lambda = m$ אם $0 \leqslant$ ואז $\omega_0,\dots,\omega_m$ בת"ל - ו! $\omega_j=0$ $j>m$.

הוכחה: אם $\{\omega_j\}$ תלויים יש ω_{m+1} ראשון שמתאפס כי הם ו"ע עם ע"ע שונים (של h) ואז לכל $j\geq m+1$ $\omega_j=0$ מטענה (2) במשפט. ואז

$$0 = e\,\omega_{m+1} = (\lambda-m)\,\omega_m \quad \omega_m \neq 0$$

לכן $\lambda = m$. $\square$

מסקנה: אם V ממימד סופי רק (ט) יכול לקרות, ואז בוחרים לבסיס $\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m\}$ נקבל

$$[\rho(h)] = \begin{bmatrix} m & & & \\ & m-2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -m \end{bmatrix}$$

$$[\rho(e)] = \begin{bmatrix} 0 & m & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} , \quad [\rho(f)] = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & m & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} (0) & \omega_0 \arrow[l, bend left, "e"] \arrow[r, bend left, "f"] & \omega_1 \arrow[l, bend left, "e"] \arrow[r, bend left, "f"] & \omega_2 \arrow[l, bend left, "e"] & \cdots & \omega_m \arrow[l, bend left, "e"] \arrow[r, bend left, "f"] & (0) \end{tikzcd}$$

הגדרה: $\mathfrak{g}$-מודול V נקרא פריק לחלוטין (או פשוט למחצה) אם הוא סכום ישר של מודולים פשוטים.

משפט (Weyl):

אם $\mathfrak{g}$ פשוטה למחצה אז כל $\mathfrak{g}$-מודול ממימד סופי הוא פשוט למחצה.

לפני שנוכיח את המשפט נזכר (וגם נוסיף) בנוגע אל הצגות תבשות מיוחדות.

בניית הצגות חדשות מישנות

אם (ρ_i, V_i) הצגות של $\mathfrak{g}$ אפשר לבנות מהן הצגות חדשות

$V_1 \oplus V_2$ $\qquad$ $x\cdot(v_1,v_2) := (\rho_1(x)v_1 , \rho_2(x)v_2)$

$V_1 \otimes V_2$ $\qquad$ $x\cdot(v_1\otimes v_2) := \rho_1(x)v_1\otimes v_2 + v_1\otimes \rho_2(x)v_2$

V^* $\qquad$ $x\cdot f(v) = -f(\rho(x)v)$

$\mathrm{Hom}(V_1,V_2)$ $\qquad$ $x\cdot T(v) = \rho_2(x)(T(v)) - T(\rho_1(x)v)$

נשים לב שתחת הזיהוי $V_1^*\otimes V_2 \cong \mathrm{Hom}(V_1,V_2)$ כל ההגדרות כאן קומפטביליות

הגדרה: אם V הוא $\mathfrak{g}$- מודול ו- $v\in V$ מקיים ש- $xv=0$ $\forall x\in\mathfrak{g}$

אז אומרים ש- v לגמרי אינווריאנטי תחת $\mathfrak{g}$

(מבחינת שם: נראה שאם $V \circlearrowleft G$ הצגה של חבורת לי אז אפשר "לגזור"

אותה ולקבל הצגה של $\mathfrak{g}=Lie(G)$ ואז $gv=v$ $g\in G$ מתורגם ל-

$X\in\mathfrak{g}$ לכל $Xv=0$)

תרגיל: הראו שהעתקה לינארית $T\in \mathrm{Hom}_k(V_1,V_2)$ היא $\mathfrak{g}$-אינווריאנטית אמ"ם

$T\in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_1,V_2)$, כלומר, היא מורפיזם של $\mathfrak{g}$- מודולים.

הוכחת משפט Weyl :

למה 1 : נניח ש- $\rho : g \to End(V)$ נאמנה. אז התבנית $B_\rho(x,y) = Tr(\rho(x)\rho(y))$ אינה מנוונת.
אכן, מקריטריון קרטן הפתירות

$$\{x \in g \mid B_\rho(x,y) = 0 \quad \forall y \in g = [g,g]\}$$

פתיר ולכן $= (0)$.

למה 2 : תהי B תבנית אינווריאנטית סימטרית על אלגברת לי g.
יהיו (e_i) ו- (f_i) בסיסים של g שהם דואליים ביחס ל- B, כלומר

$$B(e_i, f_j) = \delta_{ij}$$

נסמן $b = \sum e_i f_i \in Ug$.
נראה ש- b במרכז של Ug ואינו תלוי בבחירת הבסיסים (e_i) ו- (f_i).
נביט בהעתקה

$$\begin{aligned} g \otimes_k g &\longrightarrow Hom_k(g,g) \\ x \otimes y &\longmapsto (z \mapsto B(y,z)\,x) \end{aligned}$$

זהו איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים ושל g-מודולים

(זהו בעצם האיזומורפיזם הקנוני שמשמש $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^* \to Hom_k(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ בתוספת הזיהוי
המושרה ע"י B בין $\mathfrak{g}$ ו- $\mathfrak{g}^*$).

הוכ׳ שלחנו את $\sum e_i\otimes f_i$ ל- $1\in Hom_k(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$. ולכן b הוא תמונת 1 תחת
הרכבת ה- $\mathfrak{g}$ - מודולים

$$
\begin{array}{ccccccc}
Hom(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) & \simeq & \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^* & \xrightarrow{B} & \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} & \longrightarrow & U\mathfrak{g} \\
1 & \mapsto & \cdots & & - & \mapsto & b
\end{array}
$$

כיוון ש- 1 שמור תחת הפעולת $\mathfrak{g}$, כך גם b, וכיון ש- $\mathfrak{g}$ יוצרת את $U\mathfrak{g}$
נובע ש- b מרכזי ב- $U\mathfrak{g}$. b נקרא איבר קזימיר המתאים ל- B.

טענה 3: נניח עכשיו ש- $\mathfrak{g}\to End(V)$ הצגה נאמנה ו- $\mathfrak{g}$ פשוטה למחצה.
יהי b איבר קזימיר המתאים ל- B_ρ. אז b מגדיר אנדומורפיזם של ההצגה V
ומתקיים $Tr_V(b)=\dim\mathfrak{g}$.

אכן, b מתחלף עם פעולת $\mathfrak{g}$ כי הוא במרכז של $U\mathfrak{g}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & U\mathfrak{g} \arrow[dr, dashed, "\tilde{\rho}"] & \\
\mathfrak{g} \arrow[ur] \arrow[rr, "\rho"'] & & End(V)
\end{tikzcd}
$$

ומתקיים $Tr_V(\tilde{\rho}(b)) = Tr_V\left(\sum \rho(e_i)\rho(f_i)\right) = \sum_i Tr_V(\rho(e_i)\cdot\rho(f_i)) = \sum_i B(e_i,f_i) = \dim\mathfrak{g}$

צעד 4: אם ה-$\mathfrak g$-מודול V מצטמצם (3) פשוט אז $\rho(b)$ איזומורפיזם של $\mathfrak g$

(למעט המקרה $\mathfrak g=(0)$ שבו $V\simeq k$).

ולכן, לפי הלמה של Schur $\mathfrak g$-אנדומורפיזם של מודול פשוט הוא איזומורפיזם או 0.

אבל $\rho(b)\neq 0$ אחרת אם כן $\mathfrak g=(0)$ כי $Tr_V(b)=\dim\mathfrak g$ (ו- $0=\mathrm{char}(k)$).

צעד 5: תהא $0\to V\to W\xrightarrow{\pi} k\to 0$ סדרה קצרה מדויקת של $\mathfrak g$-מודולים.

(נשים לב ש- k בהכרח מודול טריויאלי כי $\mathfrak g=[\mathfrak g,\mathfrak g]$).

נראה שהסדרה מתפצלת, כלומר, יש $k\simeq U\subset W$ כך ש- $W=V\oplus U$ ו- U

מועתק על k תחת π:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V \arrow[r] & W \arrow[r, "\pi"] & k \arrow[r] \arrow[l, bend left, dashed, "\sigma"] & 0 \end{tikzcd}$$

(a) רדוקציה למקרה שבו V הוא $\mathfrak g$-מודול פשוט.

נניח $(0)\subsetneq V_1\subsetneq V$ תת-$\mathfrak g$-מודול, ונביט בסדרה המושרית

(אלה היו כבר "על" k) $0\to V/V_1\to W/V_1\to k$

אז באינדוקציה יש ישר במנה כך ש- $W/V_1 = V/V_1\oplus U/V_1$

ואז מהסדרה $0\to V_1\to U\to U/V_1\simeq k\to 0$ נקבל ישר משלים ל- V_1

ב- U והוא יהיה ישר משלים ל- V ב- W.

(b) רדוקציה למקרה שבו V הצגה נאמנה של V.

יהי $\mathfrak{a} := \ker(\mathfrak{g} \to End(V))$. לכל $x \in \mathfrak{a}$ מתקיים

$$\begin{cases} xW \subset V \\ xV = (0) \end{cases}$$

לכן $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}]$ מאפס את V, אבל $\mathfrak{a}=[\mathfrak{a},\mathfrak{a}]$ כי הוא אידיאל באלגברה פשוטה למחצה ולכן פשוט למחצה.

מכאן $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ פועלת על W ומהבנייה פועלת נאמנה על V.
(וה"א עדיין פשוטה למחצה כמנה של $\mathfrak{g}$).

(c) נניח $\rho : \mathfrak{g} \to End(V)$ נאמנה ו- V פשוטה.

התבנית B_ρ אינה מנוונת לפי (1) ויהי $b \in U\mathfrak{g}$ קזימיר המתאים ל- B_ρ.

b מגדיר $\mathfrak{g}$-אנדומורפיזם של W ו- $bW \subseteq V$ כי b מאפס את k.

אם $\mathfrak{g}=(0)$ אזי הטענה למעשה ברורה (כל סדרה של k מרחבים מתפצלת).

אחרת $bV = V$ לפי (4) ולכן $U = \ker(b : W \to W)$ משלים של V ב- W שמור ע"י $\mathfrak{g}$.

צעד 6: המקרה הכללי. נניח

$$0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$$

סדרה קצרה מדויקת של $\mathfrak{g}$-מודולים, נראה שהיא מתפצלת.

יהי $W \subseteq \mathrm{Hom}_k(E, E_1)$ תת המרחב של העתקות שצמצומן ל-E_1 הוא הומותטיה (= כפל בסקלר). יהי $V \subset W$ תת המרחב של העתקות שצמצומן ל-E_1 הוא 0.

$$\begin{bmatrix} 0 & * \\ * & * \end{bmatrix} \subset \begin{bmatrix} \alpha I & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

מקבלים סדרה: $0 \to V \to W \to k \to 0$ סדרה מדויקת

(אלא אם כן $E_1 = (0)$ ואז אין בעיה)

מצעד (5) יש $\phi \in W$ שהוא אינווריאנטי תחת $\mathfrak{g}$, ומועתק אל 1 ב-k.

זוהי $\mathfrak{g}$-העתקה $E \to E_1$ שהצמצום שלה ל-E_1 הוא הזהות $\square$

למה: יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל k ויהי $x \in \mathrm{End}(V)$.

(1) אם x נילפוטנטי/פשוט למחצה אז גם ad_x נילפוטנטי/פשוט למחצה.

(2) אם $x = s+n$ פירוק ז'ורדן של x ב-$\mathrm{End}(V)$ אז $ad_x = ad_s + ad_n$ פירוק ז'ורדן של ad_x ב-$\mathrm{End}(\mathrm{End}(V))$.

הוכחה: (1) המקרה הנילפוטנטי ברור.

אם x פשוט למחצה, יהי $B=(v_1,\dots,v_m)$ בסיס של V עבורו $[x]=\begin{pmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_m\end{pmatrix}$

יהי (e_{ij}) הבסיס הסטנדרטי של V ביחס ל-B, כלומר $e_{ij}(v_k)=\delta_{jk}v_i$.

אז $ad_x(e_{ij}) = x e_{ij} - e_{ij} x = (a_i-a_j)e_{ij}$.

(2) מלינאריות ad מתקיים $ad_x = ad_s + ad_n$. מ-(1) ad_s פשוט למחצה

ו-ad_n נילפוטנטי. כיוון ש-$ad: End(V) \to End(End(V))$ הצגה, מתקיים

$[ad_s, ad_n] = ad_{[s,n]} = 0$ ולכן הטענה נובעת מיחידות הפירוק. □

טענה: תהא U k-אלגברה (לאו דווקא אסוציאטיבית) ממימד סופי.

אז $Der_k(U,U)$ סגורה תחת פירוק ז'ורדן, כלומר, אם $\delta \in Der_k(U)$ ו-$\delta=\sigma+\nu$ פירוק ז'ורדן ב-$End_k(\ )$ אז $\sigma,\nu \in Der_k(U)$.

הוכחה: מספיק להראות ש-$\sigma \in Der_k(U,U)$.

לכל $a \in k$ נגדיר

$$U_\alpha := \{x \in U \mid (\delta - aI)^l x = 0,\ l >> 0\}$$

אז $U = \bigoplus_a U_a$ ו-σ פועל על U_a ככפל ב-a.

תרגיל: $(\delta-(a+b)Id_U)^m(xy) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (\delta - aI)^{m-i}x \cdot (\delta - bI)^i y$ (אינדוקציה קלה)

מסקנה: $\mathcal{U}_a \cdot \mathcal{U}_b \subseteq \mathcal{U}_{a+b}$

ולכן, אם $x \in \mathcal{U}_a$ ו- $y \in \mathcal{U}_b$ נקבל

$$\sigma(xy) = (a+b)xy = (\sigma x)y + x\sigma(y)$$

כיוון ש- $\mathcal{U} = \oplus \mathcal{U}_a$ נקבל ש- σ גזירה. $\square$

משפט: אם $\mathfrak{g}$ פשוטה אז $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Der}_k(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$.

הוכחה: כאמור נשים לב ש- $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \triangleleft \mathrm{Der}_k(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$. אכן

$$[\delta, \mathrm{ad}_x] = \mathrm{ad}_{\delta(x)}$$

כי $[\delta, \mathrm{ad}_x]y = \delta(\mathrm{ad}_x(y)) - \mathrm{ad}_x(\delta(y)) = \delta([x,y]) - \mathrm{ad}_x(\delta(y))$

$$= [\delta(x),y] + \cancel{[x,\delta(y)]} - \cancel{[x,\delta(y)]} = \mathrm{ad}_{\delta(x)}(y)$$

שנית, נשים לב שאם $\mathfrak{g}$ אלגברה כלשהי, $B_{\mathfrak{g}}$ תבנית קילינג של $\mathfrak{g}$ ו- $\mathfrak{a} \triangleleft \mathfrak{g}$ אידיאל אז $B_{\mathfrak{a}} = B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}}$ (במילים: תבנית קילינג של $\mathfrak{a}$ היא הצמצום של תבנית קילינג של $\mathfrak{g}$).

אכן, אם $W \subset V$ מרחב תת-מרחב ממימד סופי ו- $\phi \in \mathrm{End}(V)$ מקיים $\phi(V) \subset W$ אז $\mathrm{Tr}_V(\phi) = \mathrm{Tr}_W(\phi|_W)$. ולכן, אם $x,y \in \mathfrak{a}$ נקבל ש- $\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ מקיים $\mathrm{ad}_x \circ \mathrm{ad}_y(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{a}$ ולכן $B_{\mathfrak{g}}(x,y) = B_{\mathfrak{a}}(x,y)$.

כעת, כיוון ש- $ad: \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} ad(\mathfrak{g})$ (מפשוטות למחצה).

בפרט גם $ad(\mathfrak{g})$ יש תבנית קילינג לא מנוונת. וכיוון ש- $ad(\mathfrak{g}) \triangleleft Der_k(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$

נובע שתבנית קילינג $B_{ad(\mathfrak{g})}$ היא צמצום של $B_{Der_k(\mathfrak{g},\mathfrak{g})}$ ונקבל ש- $m = ad(\mathfrak{g})^{\perp}$

אידיאל ב- $Der_k(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$. כיוון ש- $B_{ad(\mathfrak{g})}$ לא מנוונת $(0) = m \cap ad(\mathfrak{g})$

ולכן $0 = [m, ad(\mathfrak{g})]$.

ולכן אם $\delta \in m$ אז $ad_{\delta(x)} = [\delta, ad_x] = 0$ לכל $x \in \mathfrak{g}$.

ולכן $\delta(x) = 0$ לכל $x \in \mathfrak{g}$ כי ad נאמנה $\Leftarrow$ $m = 0$ $\square$

פירוק ז'ורדן המופשט

אם $\mathfrak{g}$ פשוטה למחצה $ad: \mathfrak{g} \to ad(\mathfrak{g}) = Der_k(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) \subseteq End_k(\mathfrak{g})$

הגדרה: נאמר ש- $x \in \mathfrak{g}$ הוא ad-פשוט למחצה / נילפוטנטי אם ad_x פ"ל/נילפוטנטי.

ולכן לכל $x \in \mathfrak{g}$ יש פירוק יחיד $x = s + n$ (שנקרא פירוק ז'ורדן המופשט)

כך ש- $ad_x = ad_s + ad_n$ פירוק ז'ורדן המופשט.

משפט: אם $\mathfrak{g} \subset End(V)$ פשוטה למחצה ! $x \in \mathfrak{g}$ עם פירוק ז'ורדן ב- $End(V)$ $x = x_s + x_n$ אז $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$. בפרט הפירוק המופשט מתלכד עם הפירוק הרגיל.

הוכחה: יהי $x \in g$ ו- $x = x_s + x_n$ פירוק ז'ורדן ב- $End(V)$.

כיוון ש- $ad_x(g) \subset g$ נקבל ש- $ad_{x_s}(g) \subset g$ ו- $ad_{x_n}(g) \subset g$, כלומר,

$ad_{x_n}, ad_{x_s} \in N_{End(V)}(g) =: N$ (המנרמל של g ב- $End(V)$).

אילו $g = N$ היינו מסיימים אבל זה לא נכון (יש דוגמאות!).

לכל $W \subset V$ g-תת-מודול של V נסמן:

$$g_W = \{ y \in End(V) \mid y(W) \subset W,\ Tr(y|_W) = 0 \}$$

כיוון ש- $g = [g,g]$ נקבל ש- $g \subseteq g_W$ לכל W כזה.

נסמן: $g' := \left(\bigcap_{\substack{W \leq V \\ g\text{-תת-מודול}}} g_W \right) \cap N$.

אז $g \triangleleft$ (תת אלגברה!) $g' < N$.

$$x,y \in g',\ \forall W,\ \forall \omega \in W,\ [x,y]\omega = x(y(\omega)) - y(x(\omega)) \in W \Rightarrow [x,y] \in g_W$$

יתר על כן, אם $x \in g_W$ אז $x_s, x_n \in g_W$ ולכן מספיק להראות ש- $g = g'$.

לפי Gen Weyl $g' = g \oplus M$ עבור $M \subseteq g'$ g-תת-מודול.

אבל, $[g,M] \subseteq g$ כי $g' \subseteq N$ ולכן הפעולה של M טריוויאלית.

יהי $W \subset V$ תת-g-מודול אי פריק.

אם $y \in M$ אז $[g,y]=0$ ולכן מהלמה של Schur y סקלר אבל $0 = \mathrm{Tr}_W(y|_W)$

כי $y \in g_W$ ולכן y פועל על W כאפס כיוון ש- $V = \bigoplus_i W_i$ סכום

ישר של אי-פריקים (משפט Weyl) נקבל ש- $y=0$. ולכן $M=0$ $\square$.

מסקנה: תהי g אלגברת לי פשוטה למחצה ו- $\phi: g \to \mathrm{End}(V)$

הצגה ממימד סופי. אם $x = s+n$ פירוק ז'ורדן המופשט ב- g

אז $\phi(x) = \phi(s) + \phi(n)$ פירוק ז'ורדן ב- $\mathrm{End}(V)$.

הוכחה: מהנחה $\mathrm{ad}_s \circlearrowright g = \bigoplus_\lambda g_\lambda$, λ ע"ע של ad_s.

אז $\mathrm{ad}_{\phi(s)} \circlearrowright \phi(g) = \bigoplus_\lambda \phi(g_\lambda)$ פירוק למרחבים עצמיים עם ע"ע λ

כי אם $\phi(y) \in \phi(g_\lambda)$ אז

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_{\phi(s)} \phi(y) &= \phi(s)\phi(y) - \phi(y)\phi(s) \\ &= \phi([s,y]) = \phi(\mathrm{ad}_s(y)) = \lambda \phi(y)\end{aligned}$$

ולכן פשוט למחצה. $\mathrm{ad}_{\phi(n)}(\phi(y)) = \phi(\mathrm{ad}_n(y))$ ולכן נילפוטנטי.

הם גם מתחלפים ולכן $\mathrm{ad}_{\phi(x)} = \mathrm{ad}_{\phi(n)} + \mathrm{ad}_{\phi(s)}$, כלומר, $\phi(x) = \phi(s) + \phi(n)$,

הוא פירוק ז'ורדן ב- $\phi(g)$ והמסקנה נובעת מהמשפט $\square$