מערכות שורשים

בשיעור זה נגדיר ונאפיין אובייקט קומבינטורי שיעזור לנו למיין אלגבראות לי פשוטות (למחצה) מרוכבות.

יהי V מרחב וקטורי ממשי ממימד סופי. יהי $0\neq \alpha\in V$.

הגדרה: שיקוף ביחס ל-α הוא אוטומורפיזם $s\in Aut(V)$ המקיים

(1) $s(\alpha)=-\alpha$

(2) קבוצת נקודות השבת של s ב-V היא תת-מרחב מקו-מימד 1, נסמן H.

בגלל ש-s מסדר 2 לכן הוא נקבע ע"י בחירת $\mathbb{R}\alpha$ ו-H.

יהי V^* המרחב הדואלי של V ו-$\alpha^*\in V^*$ הפונקציונל (היחיד) ב-V^* שמאפס את H ו-$\alpha^*(\alpha)=2$ (נשתמש גם בסימון $\alpha^*(\beta)=\langle\alpha^*,\beta\rangle$). אז

$$s(x)=x-\langle\alpha^*,x\rangle\alpha$$

מגדיר שיקוף כנ"ל.

למה: אם $0\neq\alpha\in V$ ו-$R\subset V$ קבוצה סופית פורשת אז יש לכל היותר שיקוף אחד המתאים לוקטור α, כך ש-$s(R)=R$.

הוכחה: יהיו s ו-s' שני שיקופים כאלה ונסמן $s \circ s' = u$. אז u מקיים

(1) $u(R)=R$

(2) $u(\alpha)=\alpha$

(3) u משרה את הזהות על $V/\mathbb{R}\alpha$.

- מ-(2) + (3) נקבל שהע"ע של u כולם 1.
- כיוון ש-R סופית, קיים n טבעי כך ש- $u^n(x)=x$ $\forall x\in R$.
- כיוון ש-R פורשת $u^n = Id_V$.
- מכאן הפולינום המינימלי של u הוא $m_u(t)=t-1$ (כי הוא מחלק את $(t-1)^{\dim V}$ ואת t^n-1), כלומר $u=Id$ ולכן $s=s'$. $\square$

הגדרה (מערכת שורשים)**:** יהי V מרחב וקטורי ממשי ממימד סופי.
תת קבוצה $R\subset V$ תקרא <u>מערכת שורשים</u> אם

(1) R סופית, פורשת את V, ואינה מכילה את 0.

(2) לכל $\alpha\in R$ יש שיקוף s_α המתאים ל-α כך ש- $s_\alpha(R)=R$.

(3) לכל $\alpha,\beta\in R$, $s_\alpha(\beta)-\beta \in \mathbb{Z}\alpha$.

מימד V נקרא הדרגה (rank) של R ואיברי R נקראים שורשים ב-V.

הערה: (•) כיוון ש- $s_\alpha(x)=x-\langle\alpha^*,x\rangle\alpha$ ולכן (3) שקול ל-

(3)' לכל $\alpha,\beta\in R$ $\langle\alpha^*,\beta\rangle\in\mathbb{Z}$

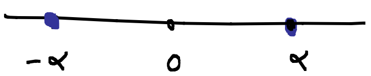
(••) אם $\alpha\in R$ אז גם $-\alpha\in R$ כי $s_\alpha(\alpha)=\alpha-\langle\alpha^*,\alpha\rangle\alpha=-\alpha$.

הגדרה: R תקרא מצומצמת (reduced) אם לכל $\alpha\in R$: $\mathbb{R}\alpha\cap R=\{\alpha,-\alpha\}$.

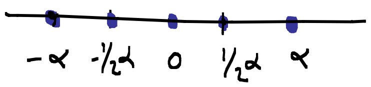
(שים לב שאם R אינה מצומצמת. אז יש $\alpha\in R$ כך ש- $t\alpha\in R$ עם $0<t<1$.
מ- (3) נובע ש- $\langle\alpha^*, t\alpha\rangle = 2t\in\mathbb{Z}$ ולכן השורשים היחידים שיכולים להיות כפולה של α הם $-\alpha, -\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\alpha, \alpha$.

דוגמאות

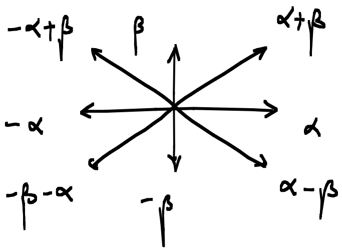
① המערכת היחידה המצומצמת מדרגה 1 היא A_1



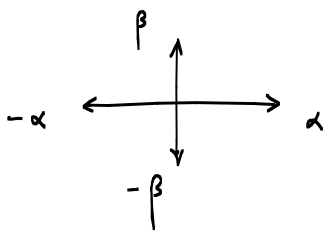
המערכת היחידה הלא מצומצמת מדרגה 1 היא



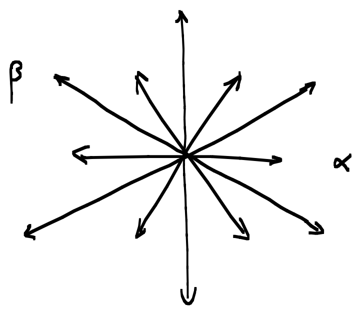
② מדרגה 2 תיתכנה האפשרויות (המצומצמות) הבאות



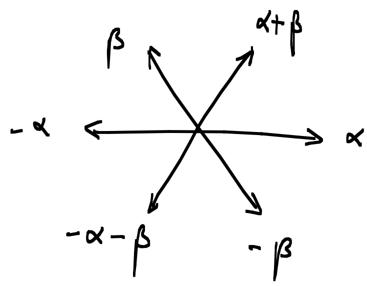
B_2



$A_1\times A_1$



G_2



A_2

הגדרה: תהא $R \subset V$ מערכת שורשים. חבורת וייל (Weyl) של R היא תת-החבורה $W \subset GL(V)$ הנוצרת ע"י השיקופים $W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in R \rangle$.

(כיוון שאברי W משרים פרמוטציות על R וכיוון ש-R פורשת נובע ש-W סופית.)

הערה: ע"י מיצוע של מכפלה פנימית על V אפשר להניח שאברי W הם העתקות אורתוגונליות, כלומר, אם $B(\,,\,)$ מכפלה פנימית על V, נגדיר

$$(v,w) := \frac{1}{|W|} \sum_{g \in W} B(gv, gw)$$

אזי מכפלה פנימית על V שהיא W-אינוריאנטית.

נוכל לרשום:

$$s_\alpha(x) = x - 2\frac{(x,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \qquad \forall x \in V$$

כיוון שהפונקציונל $\alpha^*(\cdot)$ מוגדר ע"י $\frac{(2\alpha,\cdot)}{(\alpha,\alpha)}$.

תנאי $(3)'$ מתורגם ל- $2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z} \qquad \forall \alpha,\beta \in R$

תרגיל: תהא $R \subset V$ מערכת שורשים. הוכח ש- $R^* = \{\alpha^* \mid \alpha \in R\} \subset V^*$ מערכת שורשים (נקראת המערכת הדואלית ל-R). הוכח ש- $\alpha^{**} = \alpha$.

הגיאומטריה במרחב השורשים

נבחן בשני שורשים $\alpha,\beta \in R$, ונגדיר את $\cos\phi$ ע"י

$$|\alpha| := (\alpha,\alpha)^{1/2}$$

$$\cos\phi := \frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$$

נקבל

$$n(\beta,\alpha) := \langle \alpha^*, \beta \rangle = \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} = 2\frac{|\beta|}{|\alpha|}\cos\phi$$

ומכאן $n(\beta,\alpha)\,n(\alpha,\beta) = 4\cos^2\phi \ni \mathbb{Z}$, ולכן $4\cos^2\phi \in \{0,1,2,3,4\}$, כאשר '4' שקול לכך ש- α ו- β פרופורציונליים.

המקרים הלא פרופורציונליים הם (עד כדי החלפת סדר בין α ו- β):

$n(\alpha,\beta)$	$n(\beta,\alpha)$	ϕ	$\lvert\beta\rvert : \lvert\alpha\rvert$
0	0	$\pi/2$	?
1	1	$\pi/3$	1
-1	-1	$2\pi/3$	1
1	2	$\pi/4$	$\sqrt{2}$
-1	-2	$3\pi/4$	$\sqrt{2}$
1	3	$\pi/6$	$\sqrt{3}$
-1	-3	$5\pi/6$	$\sqrt{3}$

טענה: יהיו $\alpha \neq \beta$ שורשים לא פרופורציונליים. אם $n(\beta,\alpha)>0$ אז $\alpha-\beta$ הוא שורש.

הוכחה: נשים לב ש- $n(\beta,\alpha)>0 \iff (\alpha,\beta)>0$ (הסימן בין השורשים זהה).

ברשימה מראה שבמקרה כזה $n(\alpha,\beta)=1$ או $n(\beta,\alpha)=1$

$n(\alpha,\beta)=1$: $\alpha-\beta = s_\beta(\alpha) \in R$

$n(\beta,\alpha)=1$: $\alpha-\beta = -(\beta - n(\beta,\alpha)\alpha) = -s_\alpha(\beta) \in R$ $\square$

בסיסים

הגדרה: תת קבוצה $S \subset R$ תקרא בסיס של R אם מתקיים

(1) S בסיס של V.

(2) כל $\beta \in R$ הוא צירוף לינארי $\beta = \sum_{\alpha \in S} m_\alpha \alpha$ עם m_α שלמים בעלי סימן זהה.

יהי $t \in V^*$ פונקציונל כך ש- $\langle t,\alpha\rangle \neq 0$ לכל $\alpha \in R$.

נסמן ב- R_t^+ את כל ה-α-ים כך ש- $\langle t,\alpha\rangle > 0$. אז $R = R_t^+ \sqcup -R_t^+$.

איבר $\alpha \in R_t^+$ יקרא <u>פריק</u> אם קיימים $\beta,\gamma \in R_t^+$ כך ש $\alpha = \beta+\gamma$, אחרת נאמר ש- α <u>אי-פריק</u>. תהא S_t קבוצת האיברים האי-פריקים ב- R_t^+.

טענה: S_t בסיס של R. בכיוון ההפוך, אם S בסיס של R ואם $t \in V^*$ מקיים ש- $\langle t,\alpha\rangle > 0$ לכל $\alpha \in S$ אז $S = S_t$.

הוכחה: נראה ש- S_t בסיס.

למה 1: כל איבר ב- R_t^+ הוא צירוף לינארי עם מקדמים אי שליליים של איברים ב-S_t.

הוכחת למה 1: תהא $I \subset R_t^+$ קבוצת השורשים שאינה מקיימת את הלמה. אם $I \neq \phi$, קיים $\alpha \in I$ כך ש- $\langle t,\alpha\rangle$ מינימלי. α בהכרח פריק (כי אחרת הוא ב- S_t) נרשום $\alpha=\beta+\gamma$, $\gamma,\beta \in R_t^+$. אז $\langle t,\alpha\rangle = \langle t,\beta\rangle+\langle t,\gamma\rangle$ וכיוון ש- $\langle t,\gamma\rangle$, $\langle t,\beta\rangle$ חיוביים הם קטנים ממש מ- $\langle t,\alpha\rangle$ ולכן $\beta,\gamma \notin I \Rightarrow \alpha\notin I$ ↯ ∎

למה 2: אם $\alpha,\beta\in S_t$ אז $(\alpha,\beta)\le 0$.

הוכחת למה 2: אילו $(\alpha,\beta)>0$ אז מטענה קודמת נקבל $\gamma=\alpha-\beta$ גם הוא שורש אם $\gamma\in R_t^+$ אז $\alpha=\beta+\gamma$ (פריק) ואם $\gamma\in -R_t^+$ אז $\beta=\alpha+(-\gamma)$ (פריק) ∎

למה 3: יהי $t\in V^*$ ו- $A\subset V$ תת-קבוצה המקיימת

(1) $\langle t,\alpha\rangle>0$ $\quad \forall\alpha\in A$

(2) $(\alpha,\beta)\le 0$ $\quad \forall \alpha,\beta\in A$

אז איברי A הם בת"ל.

במילים: וקטורים השייכים לחצי מרחב ויוצרים זוית קהות ביניהם הם בת"ל.

הוכחת למה 3: כל תלות לינארית בין איברי A אפשר לרשום כך

$$\sum_\beta y_\beta \beta = \sum_\gamma z_\gamma \gamma$$

עם $y_\beta, z_\gamma \geq 0$, כאשר הסכומים בשני האגפים הם על קבוצות זרות.

נסמן $\delta = \sum y_\beta \beta$, ואז

$$(\delta,\delta) = \sum y_\beta z_\gamma (\beta,\gamma) \underset{(2)}{\leq} 0$$

ולכן $\delta = 0$, אבל אז

$$0 = \langle t,\delta\rangle = \sum_\beta y_\beta \langle t,\beta\rangle = \sum z_\gamma \langle t,\gamma\rangle$$

ולכן $y_\beta = 0$, $z_\gamma = 0$. $\square$

משלים הלמה נכון ש- S_t בסיס.

כיוון שני: יהי $S \subset R$ בסיס. יהי $t \in V^*$ כך ש- $\langle t,\alpha\rangle > 0$ $\forall \alpha \in S$.

אם נסמן ב- R^+ את איברי R שהם צירופים אי שליליים של איברי S,

נקבל $R^+ \subset R_t^+$, $-R^+ \subset -R_t^+$ ולכן $R^+ = R_t^+$ (כי $R = R^+ \sqcup -R^+$).

מכאן גם $S \subset S_t$ וכיוון ש- $|S| = |S_t|$ כי שניהם בסיסים מקבלים שוויון. $\square$

דוגמא: נניח ש- $2 = \dim V$, ויהי $\{\alpha,\beta\}$ בסיס של R. כיוון שהזווית

בין α, β קהה נקבל שהאפשרויות היחידות הן $\phi = \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$.

נקבל בדיוק את $A_1 \times A_1$, A_2, B_2, G_2. (כמערכות מצומצמות).

תכונות של בסיסים

יהי $S \subset R$ בסיס ונסמן ב- R^+ את השורשים החיוביים.

טענה: כל שורש חיובי $\beta \in R^+$ אפשר לרשום כצירוף $\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ עם $\alpha_i \in S$ כך שכל צירוף חלקי מהצורה $\alpha_1 + \cdots + \alpha_j$ $(1 \le j < k)$ גם הוא שורש.

הוכחה: יהי $t \in V^*$ פונקציונל המקיים $\langle t, \alpha \rangle = 1$ $\forall \alpha \in S$.

כיוון ש- $\beta \in R^+$, $0 \le k := \langle t, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$. נוכיח את הטענה באינדוקציה על k.

ראשית, נשים לב שלא ייתכן ש- $(\alpha, \beta) \le 0$ לכל $\alpha \in S$ כי אז $S \cup \{\beta\}$ תהיה בת"ל. ולכן, יש $\alpha \in S$ עם $(\alpha, \beta) > 0$.

אפשר להניח ש- β ו- α אינם פרופורציונליים, (כי היה נכון עבור $\beta = \alpha$ או $\beta = 2\alpha$).

ולכן, מטענה קודמת $\gamma = \beta - \alpha$ הוא שורש.

לא ייתכן ש- $\gamma \in -R^+$ כי אז $\alpha = \beta + (-\gamma)$ בסתירה לכך ש- α פשוט.

מכיוון ש $\gamma \in R^+$ ו- $\langle t, \gamma \rangle = \langle t, \beta \rangle - \langle t, \alpha \rangle = k-1$ נפעיל את הנחת האינדוקציה על γ ונקבל את הצירוף הדרוש עם $\alpha_k = \alpha$. $\square$

טענה: נניח ש- R מצומצם ו- $\alpha \in S$. אז $s_\alpha(R^+ \setminus \{\alpha\}) = s_\alpha(R^+ \setminus \{\alpha\})$.

הוכחה: ניקח $\beta \in R^+ \setminus \{\alpha\}$. אז $\beta = \sum_{\gamma \in S} m_\gamma \gamma$, $m_\gamma \ge 0$.

כיוון ש-R מצומצמת ו- $\alpha \neq \beta$, נובע ש-β אינו פרופורציונלי ל-α, ולכן יש $\gamma \in S$ כך ש- $m_\gamma \neq 0$. כיוון ש- $s_\alpha(\beta) = \beta - n(\beta,\alpha)\alpha$, נובע שהמקדם γ ב- $s_\alpha(\beta)$ נותר ללא שינוי: m_γ. מכאן $s_\alpha(\beta) \in R^+$. $\square$

מסקנה: יהי $\rho := \frac{1}{2} \sum_{\beta \in R^+} \beta$. אז $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$ $\forall \alpha \in S$.

הסבר: נסמן $\rho_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in R^+ \setminus \{\alpha\}} \beta$. אז $s_\alpha(\rho_\alpha) = \rho_\alpha$, $\forall \alpha \in S$.

מצד שני, $\rho = \rho_\alpha + \alpha/2$, $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ $\Leftarrow$ $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$.

תרגיל: נניח ש-R מצומצמת ו-S בסיס. אז S^* בסיס של R^*.

הוכחה: נסמן $R' = \{\alpha' := \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)} \mid \alpha \in R\} \subset V$

אז מהאיזומורפיזם $V \xrightarrow{\sim} V^*$, $\alpha' \mapsto (\alpha', \cdot)$ מספיק להראות ש- $\{\alpha' \mid \alpha \in S\}$ בסיס של R'.

אם $t \in V^*$ כך ש- $\langle t, \alpha \rangle > 0$ לכל $\alpha \in S$ אז $(R'_t)^+ = \{\alpha' \mid \alpha \in R^+\}$.

מכאן התחום הקמור C שנוצר ע"י $(R'_t)^+$ מתלכד עם התחום הנוצר ע"י R^+.

אם S'_t הבסיס המתאים ל-R' אז חצאי הישרים $\{\mathbb{R}_{>0}\alpha' \mid \alpha \in S'_t\}$ הם יוצרים אקסטרמליים של C ולכן מתלכדים עם $\{\mathbb{R}_{>0}\alpha \mid \alpha \in S\}$ כיוון ש-R מצומצמת כי אז ישר כזה מכיל בדיוק שורש אחד מ-R' שחייב להיות α'.

לכן $S = S'_t$. $\square$

חבורת ווייל (Weyl)

אם $t\in V^*$ ו- $w\in W$ נגדיר $w(t)$ ע"י $\langle w(t), f\rangle := \langle t, w(f)\rangle$

משפט: תהיו R מערכת שורשים מצומצמת, תהיו W חבורת ווייל של R. אז

(1) לכל $t\in V^*$ יש $w\in W$ כך ש- $\langle w(t),\alpha\rangle \geq 0$ לכל $\alpha\in S$.

(2) W פועלת טרנזיטיבית על אוסף הבסיסים של R.

(3) לכל $\beta\in R$ יש $w\in W$ כך ש- $w(\beta)\in S$.

(4) $W=\langle s_\alpha \mid \alpha\in S\rangle$.

הוכחה: נסמן $W_S=\langle s_\alpha \mid \alpha\in S\rangle \le W$.

נוכיח את (1), (2), (3) עבור W_S ואז נוכיח את (4).

(1) יהי $t\in V^*$ ו- $\rho=\frac{1}{2}\sum_{\beta\in R^+}\beta$. נבחר $w\in W$ כך ש- $\langle w(t),\rho\rangle$ מקסימלי.

בפרט $\forall \alpha\in S$ $\langle s_\alpha w(t),\rho\rangle \leq \langle w(t),\rho\rangle$

אבל $\langle s_\alpha w(t),\rho\rangle = \langle w(t), s_\alpha(\rho)\rangle = \langle w(t),\rho-\alpha\rangle$ ולכן $\langle w(t),\alpha\rangle\geq 0$.

(2) יהי $t'\in V^*$ כך ש- $\langle t',\alpha'\rangle>0$ לכל $\alpha'\in S'$. לפי (1), יש $w\in W_S$

כך שאם $t:=w(t')$ אז $\langle t,\alpha\rangle\geq 0$ לכל $\alpha\in S$.

כיוון ש- $\langle t,\alpha\rangle = \langle t', w^{-1}(\alpha)\rangle$ וכיוון ש- t' לא מתאפס על אף שורש, נקבל, שאמנם

$\langle t,\alpha\rangle>0$ לכל $\alpha\in S$. מטענה קודמת $S=S_t$ ו- $S'=S_{t'}$

וכיוון ש- $\omega: t'\mapsto t$ נקבל $\omega: S'\to S$.

(3) יהי $\beta\in R$, ויהי $L\subset V^*$ מישור של פונקציונלים שמתאפסים על β.
העל-מישורים המתאימים לשורשים שאינם $\pm\beta$ כולם שונים מ- L, ויש מספר סופי של כאלה. לכן יש $t_0\in L$ כך ש

$$\langle t_0,\beta\rangle=0$$

$$\langle t_0,\gamma\rangle\neq 0 \qquad \forall\gamma\in R,\ \gamma\neq\pm\beta$$

אפשר לבחור t קרוב מספיק ל- t_0 כך ש

$$\langle t,\beta\rangle=\varepsilon \qquad \varepsilon>0$$

$$|\langle t,\gamma\rangle|>\varepsilon \qquad \forall\gamma\in R,\ \gamma\neq\pm\beta$$

אם S_t הבסיס של R המתאים ל- t אז $\beta\in S_t$ (הוא אי-פריק ממינימליות $\langle t,\beta\rangle$ וחיובי כי $\varepsilon>0$). מ- (2) יש $\omega\in W_S$ כך ש- $\omega(S_t)=S$ ולכן $\omega(\beta)\in S$.

(4) $W_S=W$: כיוון ש- W נוצרת ע"י s_β, $\beta\in R$, מספיק להראות ש- $s_\beta\in W_S$ לכל $\beta\in R$. מ- (3) יש $\omega\in W_S$ כך ש- $\alpha:=\omega(\beta)\in S$, ואז

$$s_\alpha=s_{\omega(\beta)}=\omega\circ s_\beta\circ\omega^{-1}$$

$$\Rightarrow\ s_\beta=\omega^{-1}\circ s_\alpha\circ\omega\in W_S \qquad \square$$

מערכות שורשים אי פריקות

טענה: נניח ש- $V = V_1 \oplus V_2$ ו- $R \subset V_1 \cup V_2$. נסמן $R_i = R \cap V_i$. אז

(1) $V_1 \perp V_2$

(2) R_i מערכת שורשים ב- V_i.

הוכחה: אם $\alpha \in R_1$ ו- $\beta \in R_2$ אז $\alpha - \beta \notin V_1 \cup V_2$ ולכן אינו שורש. לפי טענה קודמת, בפרט זה אומר ש- $(\alpha,\beta) \leq 0$. כיוון שטיעון זה תקף גם עבור $-\beta$ נקבל ש- $(\alpha,\beta) = 0$. כיוון ש- R_i פורש את V_i אז (1) נובע.

מ-(1) נובע שכל שיקוף המתאים ל- $\alpha \in R_1$ שומר על V_2 ולכן גם על V_1. □

הגדרה: אם $R = R_1 \oplus R_2 \subset V_1 \oplus V_2$ כמו בטענה אומרים ש- R הינו הסכום הישר של R_1 ו- R_2. אם אין פירוק כזה אומרים ש- R אי פריקה.

בדרך כלל מערכת שורשים הינו סכום ישר של אי פריקות [illegible].

מטריצת קרטן (Cartan)

מטריצת קרטן של R (ביחס לבסיס S) היא המטריצה

$$(n(\alpha,\beta))_{\alpha,\beta\in S} \in M_{|S|}(\mathbb{Z})$$

($n(\alpha,\alpha)=2$, $\alpha\neq\beta$ לכל $n(\alpha,\beta)\le 0$, $n(\alpha,\beta)=\langle\beta^*,\alpha\rangle\in\mathbb{Z}$)

דוגמא: מטריצת קרטן של A_2 היא $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ ושל G_2 היא $\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}$.

הגדרה: מורפיזם של מערכות שורשים (R,V) ו- (R',V') הוא העתקה לינארית $T:V\to V'$ כך ש-

- $T(R)\subset R'$
- $\langle T(\alpha)^*, T(\beta)\rangle = \langle\alpha^*,\beta\rangle$ לכל $\alpha,\beta\in R$

טענה: מערכת שורשים מצומצמת נקבעת עד כדי איזומורפיזם ע"י מטריצת קרטן שלה.

הוכחה: נניח $S'\subset R'\subset V'$ ו- $S\subset R\subset V$ מערכות שורשים עם בסיסים.

נניח ש- $\phi:S\to S'$ העתקה חח"ע כך ש- $n(\phi(\alpha),\phi(\beta))=n(\alpha,\beta)$ לכל $\alpha,\beta\in S$.

נראה שיש איזומורפיזם יחיד $\tilde{\phi}:V\to V'$ המרחיב את ϕ כך ש- $\phi(R)=R'$.

נגדיר את $\tilde{\phi}$ כהרחבה הלינארית היחידה. מיד נובע שלכל $\alpha,\beta\in R$

$$\langle \tilde{\phi}(\alpha), \tilde{\phi}(\beta)\rangle = \langle \alpha, \beta\rangle \qquad (*)$$

כי שוויון זה נכון לשורשים הפשוטים וכל מרכיבי השוויון (*) לינאריים. נותר להראות ש- $\tilde{\phi}(R)=R'$. ואכן, לכל $\alpha,\beta\in S$ מתקיים

$$s_{\phi(\alpha)}\circ\tilde{\phi}(\beta) = s_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta)) = \phi(\beta) - n(\phi(\alpha),\phi(\beta))\,\phi(\alpha)$$

$$\tilde{\phi}\circ s_\alpha(\beta) = \tilde{\phi}(\beta - n(\alpha,\beta)\alpha) = \phi(\beta) - n(\beta,\alpha)\,\phi(\alpha)$$

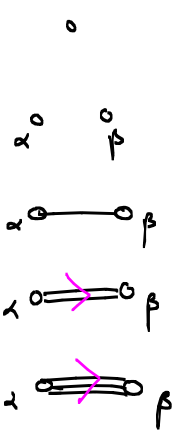
לכן, $s_{\phi(\alpha)}\circ\tilde{\phi} = \tilde{\phi}\circ s_\alpha$ לכל $\alpha\in S$, ולכן $\underbrace{W'}_{\text{חבורת וייל של } R'} = \tilde{\phi}\underbrace{W}_{\text{חבורת וייל של } R}\tilde{\phi}^{-1}$

כיוון ש- $R=W(S)$, $R'=W(S')$ נובע $\tilde{\phi}(R)=R'$. □

דיאגרמת דינקין (Dynkin)

דיאגרמת דינקין המתאימה ל- R (ביחס לבסיס S) היא גרף שבו $|S|$
קודקודים ובין $\alpha,\beta\in S$ יש $n(\alpha,\beta)\cdot n(\beta,\alpha)$ צלעות

דוגמאות



A_1

$A_1\times A_1$ $\quad \theta=\pi/2$

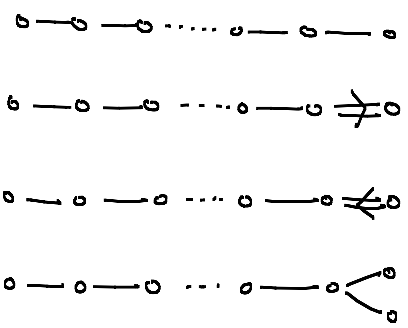
A_2 $\quad \theta=2\pi/3 \quad |\alpha|=|\beta|$

B_2 $\quad \theta=3\pi/4 \quad |\alpha|>|\beta|$

G_2 $\quad \theta=5\pi/6 \quad |\alpha|>|\beta|$

נוסיף דקורציה כדי לציין מיהו השורש הגדול יותר.

משפט: דיאגרמות דינקין המתאימות למערכות שורשים אי-פריקות הן בדיוק:

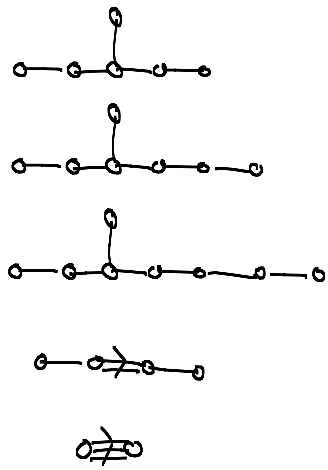


$A_n \quad n\geq 1$

$B_n \quad n\geq 2$

$C_n \quad n\geq 3$

$D_n \quad n\geq 4$



E_6

E_7

E_8

F_4

G_2

הגדרה:

נאמר שדיאגרמה בת n קדקודים שבה כל קדקוד מחובר לקדקוד אחר ע"י $0,1,2,3$ צלעות היא <u>אדמיסבילית</u> אם קיימים $e_1,\dots,e_n \in \mathbb{R}^n$ כך שהזוית בין e_i ו- e_j היא $\pi/2$, $2\pi/3$, $3\pi/4$ או $5\pi/6$ כאשר מספר הצלעות בין i ו- j הוא 0, 1, 2 או 3, בהתאמה (שוכחים לרגע את החצים), ו- $\|e_i\| = 1$.

נתחיל באבחנות הבאות:

1. כל תת-דיאגרמה של דיאגרמה אדמיסבילית המתקבלת ע"י מחיקת קדקוד וכל הצלעות המחוברות אליו גם היא אדמיסבילית.

2. (א) יש לכל היותר $n-1$ זוגות קדקודים מחוברים בצלע.
   (ב) בדיאגרמה אין מעגלים.

3. אין קדקוד עם יותר מ- 3 צלעות.

4. בדיאגרמה אדמיסבילית כל שרשרת קדקודים המחוברים זה לזה בצלע אחת כך שרק קצוות השרשרת מחוברות לקדקודים שאינם בשרשרת אפשר לצמצם לקדקוד אחד והתוצאה תשאר אדמיסבילית.

נשים לב ש- (•) $(e_i,e_j) \in \{0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\}$, בפרט $2(e_i,e_j) \le -1$.

(••) $4(e_i,e_j)^2 =$ מספר הצלעות בין i ו- j

1. ברור

2. (א) נובע מ- $0 < (\sum e_i, \sum e_j) = n + 2\sum_{i<j}(e_i, e_j)$

(ב) נובע מ- (א) ומ- 1.

3. מ- 1., אפשר להניח שאחד הקדקודים, נאמר e_1, מחובר לכל האחרים.

מ- 2., הקדקודים האחרים אינם מחוברים ביניהם.

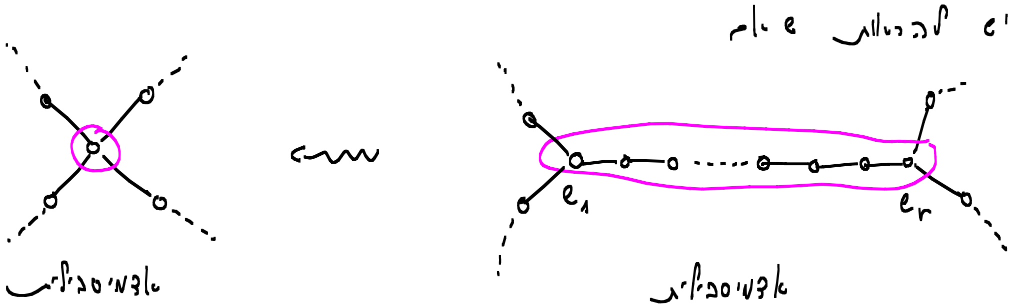
נשאר, אם כן, להראות ש- $\sum_{j=2}^{n} 4(e_1,e_j)^2 < 4$

אבל $e_2, \dots, e_n$ הם וקטורי יחידה מאונכים זה לזה ו- e_1 אינו נמצא במרחב הנפרש על ידם (כי הזויות ההדדיות קהות וראינו שכאלה וקטורים הם בת"ל) ולכן

$$1 = \|e_1\|^2 > \sum_{j=2}^{n} (e_1, e_j)^2$$

כנדרש.

4. יש להראות שאם



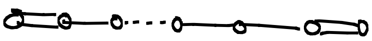
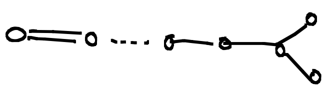
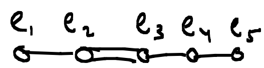
אם $e_1,\dots,e_r$ הוקטורים בשרשרת, אז $f=e_1+\dots+e_r$ הוא וקטור מאורך 1, כי

$$(f,f) = r + 2\big((e_1,e_2)+(e_2,e_3)+\dots+(e_{r-1},e_r)\big)$$
$$= r-(r-1) = 1$$

יתר על כן, f מקיים את אותם קשרים עם שאר הוקטורים, כי

$$(f,e_j) = (e_1,e_j) \quad \text{או} \quad (e_r,e_j)$$

נעבור למיון:

- G_2 הוא הגרף היחיד האפשרי עם צלע משולשת.  (נובע מ- 3.)
- לא יתכנו שתי צלעות כפולות כי  ניתנת לכיווץ ל- .
- באופן דומה, יתכן רק קדקוד אחד עם ערכיות 3.
- לכן, לא יתכן שמופיע 
- לבסוף 

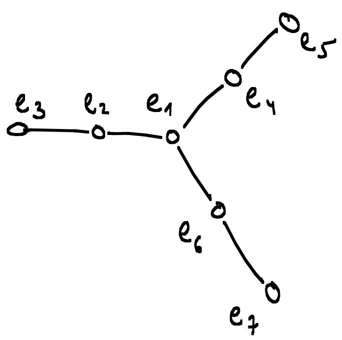
אינו אפשרי.

(נובע מהתרגיל הבא: אם $v=a_1e_1+a_2e_2$ ו- $w=a_3e_3+a_4e_4+a_5e_5$ תחשבו את $\|v\|^2$, $\|w\|^2$ ואת (v,w) והראו שיש בחירה של המקדמים הסותרת את אי-שוויון קושי-שוורץ)

בכך כיסינו את כל הדיאגרמות שמכילות את  .

נשאר לדון במקרה שבו יש קדקוד מערכיות 3. יש להראות שהאפשרויות היחידות הן D_n, E_6, E_7, E_8.

נניח כ-



ונביט בשלושת וקטורי היחידה המאונכים הבאים:

$$u = (2e_2 + e_3)/\sqrt{3}$$

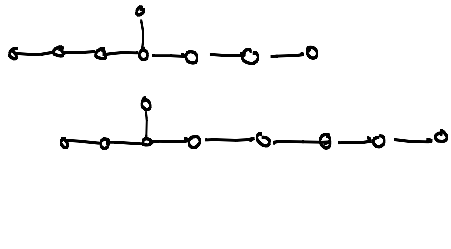
$$v = (2e_4 + e_5)/\sqrt{3}$$

$$w = (2e_6 + 7_7)/\sqrt{3}$$

אבל, $e_1 \notin \mathrm{Span}\{u,v,w\}$ ולכן

$$1 = (e_1,e_1) > (e_1,u)^2 + (e_1,v)^2 + (e_1,w)^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 .$$

תרגיל: שללו את המקרים



□