שבוע 1

חבורות לי

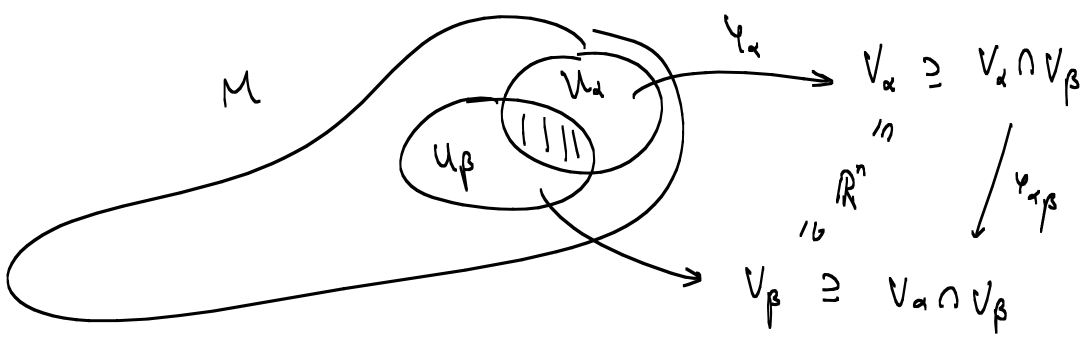
בהרצאה זו נגדיר חבורות לי ונתאר את תכנית הקורס.

יריעות חלקות

<u>יריעה</u> n-ממדית היא מרחב טופולוגי (האוסדורף) כך שלכל נקודה בו יש סביבה הומיאומורפית לתת-קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{R}^n$. אנו נניח גם שמתקיימת "אקסיומת המניה השניה", דהיינו, יש לטופולוגיה בסיס בן מניה.

אם $x\in M$ ו-$\mathcal{U}$ סביבה של x כך ש-$\varphi:\mathcal{U}\to V\subseteq\mathbb{R}^n$ הומיאומורפיזם אז φ נקראת <u>מפה</u>.

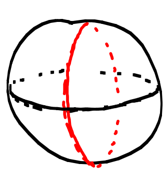
<u>יריעה חלקה</u> היא יריעה M יחד עם אוסף מפות $\varphi_\alpha:U_\alpha\to V_\alpha$ המכסות את M, כך שההעתקות $\varphi_{\alpha\beta}:=\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}: V_\alpha\cap V_\beta\to V_\alpha\cap V_\beta$ חלקות.



אוסף המפות נקרא <u>אטלס</u>, ונניח (לפשטות) תמיד שבחרנו אטלס מקסימלי.

דוגמא: $S^2=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$

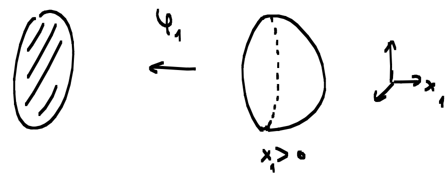
נכסה את הספירה באמצעות 6 קבוצות פתוחות $\{U_i^\pm\}$ כאשר



$$U_i^\pm = S^2\cap\{x\in\mathbb{R}^3 \mid \pm x_i>0\}$$

עם מפות $\varphi_1 : U_1^{\pm} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, ובאופן דומה $\varphi_i : U_i^{\pm} \to \mathbb{R}^2$.

$$(x_1,x_2,x_3) \longmapsto (x_2,x_3)$$



אז, למשל $\varphi_{13}(x_2,x_3) = \left(\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}\,,\ x_3\right)$ שהיא חלקה בתחום ובאופן דומה עם האחרות.

<u>מורפיזם בין יריעות חלקות</u> (= העתקה חלקה) היא פונקציה רציפה $f: M \to N$ המקיימת שלכל $x \in M$, לכל מפה $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ סביב x ולכל מפה (V_β,ψ_β) סביב $f(x)$ ההעתקה $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ חלקה:

$$\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{f} & N \\
\cup & & \cup \\
U_\alpha & & V_\beta \\
\downarrow{\scriptstyle \varphi_\alpha} & & \downarrow \\
U_\alpha' & \xrightarrow{\psi_\beta f \varphi_\alpha^{-1}} & V_\beta' \\
\cap & & \cap \\
\mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^m
\end{array}$$

הגדרה (חבורת לי): חבורת לי היא חבורה שהיא גם יריעה חלקה כך שהעתקות הכפל וההופכי הן חלקות

$$\mu : G \times G \to G\ , \quad (x,y) \mapsto x \cdot y$$

$$i : G \to G\ , \quad x \mapsto x^{-1}$$

דוגמא: אם $F = \mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$, נסמן

$$GL_n(F) = \{ x \in M_n(F) \mid \det(x) \neq 0 \}$$

חבורת המטריצות ההפיכות ב- $M_n(F)$.

הטופולוגיה על $M_n(F)$ היא זו המושרית מ- F^{n^2}, כלומר, $x_m \to x$ אם $(x_m)_{ij} \to (X)_{ij}$ לכל $n \geq i,j \geq 1$. כיוון ש- $\det : M_n(F) \to F$ רציפה אז $GL_n(F) = \det^{-1}(F^*)$ נובע ש- $GL_n(F)$ פתוחה בטופולוגיה המושרית, בפרט $GL_n(F)$ יריעה חלקה.

הפעולות הכפל וההופכי ב- $GL_n(F)$ נתונות ע"י פולינומים ולכן הן חלקות.

למשל, אם $n=2$:

$$(\text{כפל}) \qquad \mu : GL_2(F) \times GL_2(F) \longrightarrow GL_2(F)$$
$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \right) \longmapsto \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$$

$$(\text{הופכי}) \qquad i : GL_2(F) \longrightarrow GL_2(F)$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

הגדרה (חבורת לי לינארית): חבורת לי נקראת חבורת לי לינארית או מטריציונית אם היא תת-חבורה סגורה של $GL_n(\mathbb{C})$.

הערות: (1) בהמשך נוכיח שכל תת חבורה סגורה של $GL_n(\mathbb{C})$ היא חבורת לי.

(2) בקורס זה נעסוק בחבורות לי לינאריות. לא כל חבורות לי הן לינאריות אולם כל המשפחות הקלאסיות הן כאלה ולכן זה מצדיק מאוד את הדיון.

3/ב שמואל

1. $GL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{C})$ החבורות הליניאריות Linear groups

$\cup$ $\cup$

$SL_n(\mathbb{R}) \subset SL_n(\mathbb{C})$ החבורות הליניאריות המיוחדות Special Linear (det = 1)

2. החבורות האורתוגונליות

$$O(n) = \{ x \in GL_n(\mathbb{R}) \mid x^t x = I \}$$
$$= \{ x \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \langle xv, xw \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n \}$$

מ"פ סקלרית ב $\mathbb{R}^n$

$$SO(n) = O(n) \cap SL_n(\mathbb{R})$$ (החבורות האורתוגונליות המיוחדות)

באופן יותר כללי לכל תבנית בילינארית סימטרית $B: F^n \times F^n \to F$

מתאימה החבורה ששומרת עליה:

$$O_B = \{ x \in F^n \mid B(xv, xw) = B(v,w) \quad \forall v,w \in F^n \}$$

למשל, אם $B(x,y) = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i y_i$ אז מסמנים $O(p,q) = O_B$.

אם $p=3$, $q=1$ מקבלים את חבורת לורנץ, החבורה ששומרת על "מטריקת" מינקובסקי/לורנץ:

$$d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix} \right) = \left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - (t_1 - t_2)^2 \right)^{1/2}$$

3. החבורות הסימפלקטיות הן החבורות השומרות על תבנית אנטי סימטרית לא מנוונת

$$B: F^{2n} \times F^{2n} \longrightarrow F, \quad B(x,y) = -B(y,x)$$

בהצגה מפורשת:

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_{n+i} - x_{n+i} y_i$$

$$= x^t J y = (x_1, \dots, x_{2n}) \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}}^{J} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix}$$

$$Sp(2n, F) = \{ x \in GL_{2n}(F) \mid x^t J x = J \}$$

4. החבורות האוניטריות

$$U(n) = \{ x \in GL_n(\mathbb{C}) \mid x^* x = I \}$$

$$= \{ x \in GL_n(\mathbb{C}) \mid \langle xv, xw \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{C}^n \}$$

מכפ' סטנדרטית ב- $\mathbb{C}^n$

החבורות האוניטריות המיוחדות

$$SU(n) = U(n) \cap SL_n(\mathbb{C})$$

5. חבורת הייזנברג

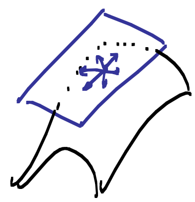
$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ & 1 & y \\ & & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

תכנית הקורס

גיאומטריה דיפרנציאלית ⇜ אלגברה ⇜ קומבינטוריקה

יריעות חלקות ⇜ מרחב משיק

חבורות לי (סימטריות) אלגבראות לי (ממשיות) ⇜ אלגבראות לי מרוכבות ⇜ מערכת שורשים



$\cup$ $\cup$

אלגבראות לי פשוטות למחצה ⇜ מערכות שורשים אי פריקות ⇜ דיאגרמות דינקין

המטרה: מיון חבורות לי פשוטות למחצה

בדיוק - תורת מבנה של חבורות / אלגבראות לי ותורת ההצגות שלהן.

הערה: תורה זו מקבילה לתורות

חבורות לי כלליות (גיאומטריה דיפרנציאלית)

חבורות p-אדיות

חבורות אלגבריות (גיאומטריה אלגברית)

קומפקטיות, קשירות ופשטות קשר

(i) קומפקטיות (שקול כאן לכך שהחבורה סגורה וחסומה.)

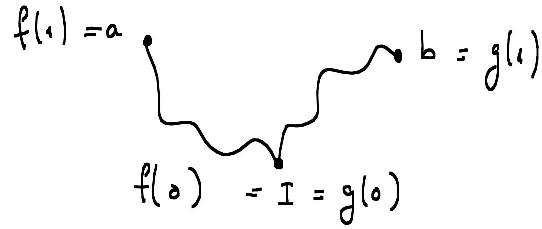
תרגיל: הוכיחו ש- $O(n)$, $SO(n)$, $\mathcal{U}(n)$, $SU(n)$ קומפקטיות.
הוכיחו שהחבורות הליניאריות/הליניאריות המיוחדות אינן קומפקטיות.

(ii) קשירות (= קשירות מסילתית עבור חבורות לי.)

החבורה תקרא קשירה אם לכל $a,b\in G$ יש מסילה רציפה $f:[\alpha,\beta]\to G$ עם $f(\alpha)=a$, $f(\beta)=b$.
אם החבורה אינה קשירה אז היא איחוד זר של מרכיבי הקשירות שלה.

טענה: תהי G ת"ח סגורה של $GL_n(\mathbb{C})$. אז מרכיב הקשירות של היחידה הוא ת"ח של G.

הוכחה:



נניח $f,g:[0,1]\to G$ רציפות עם $f(0)=g(0)=I$, $f(1)=a$, $g(1)=b$.
אז $t\mapsto f(t)\cdot g(t)$ רציפה המחברת את I עם ab (= סגירות לכפל)
ו- $t\mapsto f(t)^{-1}$ רציפה המחברת את I עם a^{-1} (= סגירות להופכי) □

טענה: $GL_n(\mathbb{C})$ קשירה.

הוכחה:

$$I \sim \begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix} \sim a \qquad \square$$

$\mathbb{C}^*$ קשיר

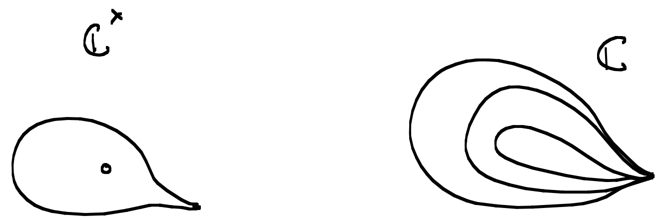
כל מטריצה מרוכבת ניתנת לשילוש

תרגיל: הראו ש- $SL_n(\mathbb{C})$, $U(n)$, $SU(n)$ קשירות.

הראו ש- $GL_n(\mathbb{R})$, $O(n)$ אינן קשירות.

(iii) פשטות קשר

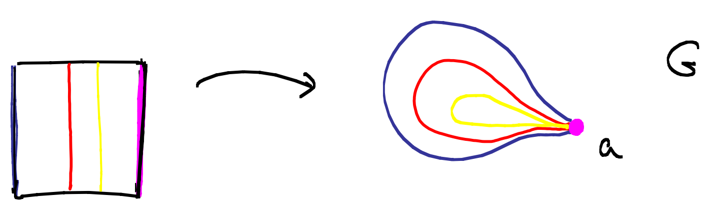
הגדרה: יריעה היא פשוטת קשר אם היא קשירה וכל מסילה סגורה ניתנת לכיווץ באופן רציף לנקודה.



לא פשוט קשר   פשוט קשר

באופן יותר מדויק: G פשוטת קשר אם בהינתן מסילה סגורה $f:[0,1]\to G$ כך ש- $f(0)=f(1)=a\in G$, קיימת פונקציה רציפה $h:[0,1]\times[0,1]\to G$ כך ש-

$$① \quad \forall s\in[0,1], \quad h(s,0)=h(s,1)$$
$$② \quad \forall t\in[0,1], \quad h(0,t)=f(t)$$
$$③ \quad \forall t\in[0,1] \quad h(1,t)=a$$



דוגמאות: $\mathbb{R}$ פשוט קשר, S^1 לא.

תרגיל: הראו ש- $SU(2)$ הומיאומורפית ל- S^3 והסיקו שהיא פשוטת קשר.

הומומורפיזמים

בשלב זה ננתח מונחים דומים במקביל בשתי קטגוריות

חבורות טופולוגיות

- חבורה שהיא גם מרחב טופולוגי והעתקות הכפל וההופכי רציפות
- מורפיזם = הומומורפיזם רציף.

חבורות לי

- חבורה שהיא גם יריעה חלקה והעתקות הכפל וההופכי חלקות
- מורפיזם = הומומורפיזם חלק.

נראה בהמשך שאם $G \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ תת-חבורה סגורה אז G חבורת לי, ואם $\varphi: G \to H$ הומומורפיזם רציף בין שתי תת חבורות סגורות של $GL_n(\mathbb{C})$ אז φ חלק.

דוגמאות: (1) $\det : GL_n(\mathbb{C}) \to GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$

(2)
$$\varphi : \mathbb{R} \to SO(2)$$
$$x \mapsto \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

תרגיל: יהי $V = \{ X \in M_2(\mathbb{C}) \mid X^* = X,\ tr(X) = 0 \} \subseteq M_2(\mathbb{C})$.

(א) הראו ש-V $\mathbb{R}$-תת-מרחב של $M_2(\mathbb{C})$ ממימד 3 ונפרש ע״י $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

(ב) הראו ש-B אורתונורמלית ביחס למכפלה הפנימית $\langle X, Y \rangle := \frac{1}{2} tr(X^* Y)$.

(ג) הראו שאם $g \in SU(2)$ ו-$X \in V$ אז $gXg^{-1} \in V$.

(ד) עבור $g \in SU(2)$ הראו שההעתקה $\varphi_g(X) = gXg^{-1}$, $\varphi_g : V \to V$ ליניארית, שומרת מכפלה פנימית והראו שההעתקה $g \mapsto \varphi_g$ היא הומומורפיזם רציף $\varphi : SU(2) \to SO(3)$ עם גרעין $\{\pm I\}$.

שאלה: מהם ההומומורפיזמים (של חבורות ביחס ל- $+$) $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$? (יש הרבה...)

מהם ההומ' הרציפים? כאן התשובה פשוטה.

נניח $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הומ' רציף. אז לכל $b\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$\varphi(n) = \varphi(\underbrace{b+b+\cdots+b}_{n\text{ פעמים}}) = \underbrace{\varphi(b)+\cdots+\varphi(b)}_{n\text{ פעמים}} = n\varphi(b)$$

$$\left.\begin{array}{ll} b=1: & \varphi(n) = n\varphi(1) \\ b=\frac{1}{m}: & \varphi\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m}\varphi(1) \end{array}\right\} \rightsquigarrow \varphi\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}\varphi(1) \quad \forall \frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$$

מרציפות φ נקבל אם כן ש- $\varphi(x) = x\varphi(1)$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

אם נסמן $a=\varphi(1)$ נקבל ש- $\varphi(x)=ax$, כלומר, כל הומ' רציף $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ נתון ע"י כפל בסקלר.

באופן דומה, אם $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{\times}_{>0}$ הומ' רציף אז $\varphi(n)=\varphi(1)^n$, $\varphi\left(\frac{1}{m}\right)=\varphi(1)^{1/m}$

ולכן $\varphi(x)=a^x$ עבור $\varphi(1)=a\in\mathbb{R}^{\times}_{>0}$, או $\varphi(x)=e^{\alpha x}$.

קיבלנו בחינם שכל הומ' כזה הוא גם חלק ולכן קיבלנו הצגה מפורשת.

זהו אב הטיפוס להומ' $\varphi:\mathbb{R}\to G$ כש- G חבורת לי לינארית.

לשם כך, בין היתר, נדון בקצרה בהעתקת האקספוננט.