שיעור 2

נפלאות הפונקציות היוצרות

1. פורמליים: טורי חזקות

נסמן ב- $\mathbb{Q}[[t]]$ את אלגברת טורי החזקות ב-t עם מקדמים ב-$\mathbb{Q}$, כלומר

$$\mathbb{Q}[[t]] = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \;\middle|\; a_n \in \mathbb{Q} \right\}$$

עם הפעולות

$$\sum_{n\geq 0} a_n t^n + \sum_{n\geq 0} b_n t^n = \sum_{n\geq 0} (a_n+b_n) t^n$$

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n t^n\right)\cdot\left(\sum_{n\geq 0} b_n t^n\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) t^n$$

תרגיל: הוכיחו ש- $\mathbb{Q}((t)) = \left\{ \sum_{n=N}^{\infty} a_n t^n \;\middle|\; a_n \in \mathbb{Q},\, N \in \mathbb{Z} \right\}$ שדה השברים של $\mathbb{Q}[[t]]$.

נסמן:

$$\exp(t) := \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} t^n \in \mathbb{Q}[[t]]$$

$$\log(1+t) := \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n} \in \mathbb{Q}[[t]]$$

נגדיר על $\mathbb{Q}((t))$ גזירה (derivation) $f \mapsto f'$ או $f \mapsto \frac{df}{dt}$

$$\left(\sum_{n\geq N} a_n t^n\right)' = \sum_{n\geq N+1} n a_n t^{n-1} \quad , N \in \mathbb{Z}$$

למה: יהיו $f,g,h\in\mathbb{Q}[[t]]$, אז

(1) $(f\cdot g)' = f'\cdot g + g'\cdot f$.

(2) $f(0)=1$ ו- $f'=f$ $\iff$ $f(t)=\exp(t)$.

(3) $g(0)=0$ ו- $g'(t)=\frac{1}{1+t}$ $\iff$ $g(t)=\log(1+t)$.

(4) $\frac{h'}{h}=\frac{1}{1+t}$ ו- $h(0)=1$ $\iff$ $h(t)=1+t$.

(5) אם $g(0)=0$ אז $f\circ g$ מוגדר ומתקיים $f(g(t))' = f'(g(t))\,g'(t)$.

הוכחה: תרגיל. $\square$

טענה: ① $\exp(\log(1+t)) = 1+t$ ② $\log(\exp(t)) = t$

הוכחה:

① נסמן $h(t)=\exp(\log(1+t))$. מתקיים $h(0)=1$ ובנוסף, $h' = \frac{d}{dt}\exp(\log(1+t)) = \exp(\log(1+t))\cdot\frac{1}{1+t} = h\cdot\frac{1}{1+t}$, ולכן $h=1+t$.

② $\frac{d}{dt}\left(\log(\exp(t))\right) = \frac{d}{dt}\left(\log\left(1+(\exp(t)-1)\right)\right) = \frac{\exp(t)'}{\exp(t)} = 1$

וכן $\log(\exp(0))=0$ מכאן $\log(\exp(t))=t$. $\square$

2. אנליטית: פונקציות ב- $M_n(\mathbb{C})$

$M_n(\mathbb{C})$ מצויידת במכפלה הפנימית הסטנדרטית $\langle A,B\rangle := tr(B^*A)$

המשרה את הנורמה $\|A\| = \left(\sum_{i,j}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$.

תרגיל: לכל $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ מתקיים $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$. (לכן זו אלגברת בנך ביחס ל- $\|\cdot\|$).

נגדיר פונקציה $\exp: M_n(\mathbb{C})\to M_n(\mathbb{C})$

$$\exp(A)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k$$

מתקיים: $\|\exp(A)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\|A\|^k = \exp(\|A\|) < \infty$

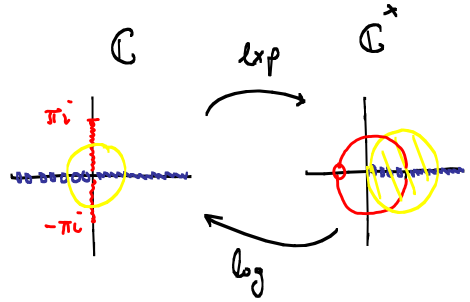
בפרט הפונקציה exp מוגדרת היטב. יתר על כן אם נסמן $f_k(A)=I+A+\dots+\frac{1}{k!}A^k$

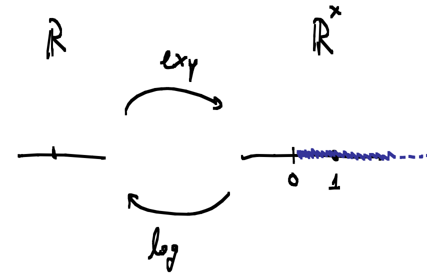
אז $f_k: M_n(\mathbb{C})\to M_n(\mathbb{C})$ סדרת פונקציות רציפות שמתכנסות במ"ש על כל כדור סגור

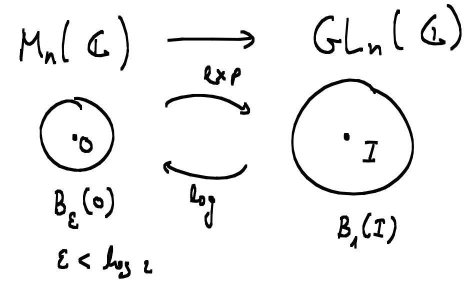
הגבולית ולכן $\exp = \lim_{k\to\infty} f_k: M_n(\mathbb{C})\to M_n(\mathbb{C})$ רציפה.

תרגיל: הוכיחו ש- exp חלקה.

כיוון ש- exp ו- log הפכיים פורמלית, תחת הרכבה הם משרים פונקציות הפוכות בתחום הגדרתן.







כלומר $\log$ מוגדרת על כדור היחידה סביב I ו- $\log(B_1(I)) \subseteq B_{\log 2}(0)$.

מתקיים:
$$\log(I+X) = X + O(\|X\|^2)$$
$$\exp(X) = I + X + O(\|X\|^2)$$

3. קצת אלגברה

טענה:

(1) $\exp(0) = I$

(2) $\exp(X)^* = \exp(X^*)$

(3) $\exp(X+Y) = \exp(X)\exp(Y) = \exp(Y)\exp(X)$ אם X ו- Y מתחלפים.

(בפרט $\operatorname{Im}(\exp) \subseteq GL_n(\mathbb{C})$)

(4) אם $C \in GL_n(\mathbb{C})$ אז $C\exp(X)C^{-1} = \exp(CXC^{-1})$.

הוכחה: (1) מיידי.

(2) ההעתקה $X \mapsto X^*$ היא אנטי-הומומורפיזם של $M_n(\mathbb{C})$: $(XY)^* = Y^*X^*$ ו- $(X+Y)^* = X^* + Y^*$, שהיא $\mathbb{R}$-לינארית (לא $\mathbb{C}$ - ססקווי-לינארית) בפרט, לכל פולינום עם מקדמים ממשיים $f \in \mathbb{R}[t]$ ולכל $X \in M_n(\mathbb{C})$ מתקיים $f(X)^* = f(X^*)$. כיוון שההעתקה $*$ גם רציפה נקבל ש-

$$\exp(X)^* = \left(\lim_N \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!}X^k\right)^* = \lim_N \left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!}X^k\right)^*$$
$$= \lim_N \left(\sum_0^N \frac{1}{k!}(X^*)^k\right) = \exp(X^*)$$

(3)

$$\exp(X+Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(X+Y)^k \overset{\text{מתחלפים } Y\text{-ו } X}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i Y^{k-i}$$

$$= \sum_{0 \le i \le k} \frac{1}{i!(k-i)!} X^i Y^{k-i} = \sum_{i,j \ge 0} \frac{1}{i!\,j!} X^i Y^j = \exp(X)\exp(Y)$$

(4) דוגמה ל-(2): ההעתקה $X \mapsto CXC^{-1}$ היא אוטומורפיזם כזה של $M_n(\mathbb{C})$. כן

הערה: הטענה שימושית לחישוב האקספוננט של מטריצה A. מספיק לחשב את צורת ז'ורדן של המטריצה ולהצמיד את התוצאה: נכתוב $A = D + N$ עם D אלכסונית, N נילפוטנית ו- $[N,D] = ND - DN = 0$. אזי

$$\exp(A) = \exp(D+N) = \underbrace{\exp(D)}_{(\exp(d_{ii}))} \cdot \underbrace{\exp(N)}_{\text{פולינום}}$$

תרגיל: הוכיחו ש- $\exp: M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ על.

נוסחת המכפלה של Lie

לכל $X,Y\in M_n(\mathbb{C})$ מתקיים

$$e^{X+Y} = \lim_{m\to\infty}\left(e^{X/m}\,e^{Y/m}\right)^m$$

הוכחה:

$$e^{X/m}\cdot e^{Y/m} = I + \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right) \xrightarrow[m\to\infty]{} I$$

לכן, עבור $m>>0$ אפשר להפעיל את $\log$:

$$\log\left(e^{X/m}\cdot e^{Y/m}\right) = \log\left(I + \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right)$$

$$= \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\left\|\frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right\|^2\right)$$

$$= \frac{X}{m} + \frac{Y}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

נפעיל $\exp$ ונעלה בחזקת m, נקבל

$$\left(e^{X/m}\cdot e^{Y/m}\right)^m = \left(e^{X/m + Y/m + O\left(\frac{1}{m^2}\right)}\right)^m = e^{X+Y+O\left(\frac{1}{m}\right)}$$

נותר רק לשאוף בגבול $m\to\infty$ $\square$

חבורות חד-פרמטריות

הגדרה: חבורה חד-פרמטרית של $GL_n(\mathbb{C})$ היא הומומורפיזם רציף $\varphi:\mathbb{R}\to GL_n(\mathbb{C})$.

טענה: לכל $A\in M_n(\mathbb{C})$ ההעתקה $\varphi_A: M_n(\mathbb{C})\to GL_n(\mathbb{C})$, $\varphi_A(t)=\exp(tA)$,
הינה מגדירה חבורה חד-פרמטרית. מתקיים

$$\frac{d}{dt}\left(\exp(tA)\right)=A\exp(tA)=\exp(tA)A$$

בפרט $\frac{d}{dt}\left(\exp(tA)\right)\Big|_{t=0}=A$.

הוכחה: נגזור את $t\mapsto I+tA+\frac{t^2A^2}{2!}+\dots$ איבר-איבר ונקבל

$$A+\frac{2tA^2}{2!}+\frac{3t^2A^3}{3!}+\dots=A\left(I+tA+\frac{t^2A^2}{2!}+\dots\right)=A\exp(tA)=\exp(tA)\cdot A \quad \square$$

טענה: כל חבורה חד פרמטרית של $GL_n(\mathbb{C})$ היא מהצורה $t\mapsto\exp(tA)$ עבור A יחיד.

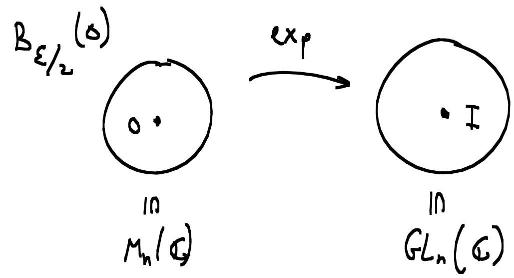
הוכחה: רעיון ההוכחה - כל הומו' רציף מ-$\mathbb{R}$ למרחב וקטורי V ממשי הוא מהצורה $t\mapsto tv$ עבור $v\in V$. בפרט $\psi:\mathbb{R}\to M_n(\mathbb{C})$ הוא מהצורה $\psi(t)=tA$.

נראה שלכל $\varphi:\mathbb{R}\to GL_n(\mathbb{C})$ חבורה ח"פ יש $\psi:\mathbb{R}\to M_n(\mathbb{C})$ כך ש- $\varphi=\exp\circ\psi$

$$\begin{tikzcd}
M_n(\mathbb{C}) \arrow[rr, "\exp"] & & GL_n(\mathbb{C}) \\
& \mathbb{R} \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

נבחר $\varepsilon < \log 2$ נסמן

$$\mathcal{U} := \exp\left(B_{\varepsilon/2}(0)\right)$$



נשים לב שלכל $g \in \mathcal{U}$ יש "שורש" יחיד $\sqrt{g} \in \mathcal{U}$:

קיום: $h := \exp\left(\frac{1}{2}\log g\right)$ מקיים $h^2 = g$.

יחידות: אם $k^2 = g$, $k \in \mathcal{U}$, נסמן $Y = \log k \in B_{\varepsilon/2}(0)$. אז $2Y \in B_\varepsilon(0)$ וגם

$X := \log g \in B_\varepsilon(0)$ מכיון $g = \exp(2Y) = \exp(X) \overset{\exp}{\underset{\text{חח"ע בתחום}}{\Longleftarrow}} 2Y = X \Leftarrow Y = \frac{1}{2}X$.

יהי $\varphi : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{C})$ הומומורפיזם כב-4.3. נבחר $t_0 > 0$ כך ש- $\varphi(t) \in \exp\left(B_{\varepsilon/2}(0)\right)$ לכל $|t| < t_0$.

כיוון ש- $\log$ חח"ע בתחום, יש $A \in M_n(\mathbb{C})$ כך ש- $t_0 A = \log \varphi(t_0) \in B_{\varepsilon/2}(0)$.

כעת, $\varphi(t_0/2)$ ו- $\exp(t_0/2\, A)$ שניהם שורשים ריבועיים של $\varphi(t_0)$ ב- $\mathcal{U}$, ולכן שווים.

באינדוקציה $\varphi(t_0/2^k) = \exp(t_0/2^k\, A)$ לכל $k \in \mathbb{N}$, ואז ע"י לקיחת חזקות נקבל

$$\varphi\left(\frac{m}{2^k} t_0\right) = \exp\left(\frac{m}{2^k} t_0 A\right) \qquad \forall k \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{Z}$$

אבל $\left\{\frac{m}{2^k}\right\}$ קבוצה צפופה ב- $\mathbb{R}$ ו- φ, $\exp$ רציפות ולכן

$$\varphi(t) = \exp(tA) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

היחידות נובעת מ- $\left.\frac{d}{dt}\varphi(t)\right|_{t=0} = A$. $\square$

אלגברות לי של חבורות לי מטריציות

הגדרה: תהא G תת חבורה סגורה של $GL_n(\mathbb{C})$. האלגברת לי של G מוגדרת ע"י

$$\mathfrak{g} = Lie(G) := \{ X \in M_n(\mathbb{C}) \mid \exp(tX) \in G \quad \forall t \in \mathbb{R} \}$$

טענה:

(1) $\mathfrak{g}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

(2) אם $X, Y \in \mathfrak{g}$ אז $XY - YX \in \mathfrak{g}$.

הוכחה:

(1) • אם $X \in \mathfrak{g}$ ו- $\alpha \in \mathbb{R}$ אז $\alpha X \in \mathfrak{g}$.

אכן $\exp(tX) \in G$ לכל $t \in \mathbb{R}$ ⇐ $\exp(t\alpha X) \in G$ לכל $t \in \mathbb{R}$

•• אם $X, Y \in \mathfrak{g}$ אז $X + Y \in \mathfrak{g}$.

אכן לכל $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{t(X+Y)} \underset{\text{נוסחת המכפלה של לי}}{=} \lim_{m \to \infty} \left(e^{\frac{1}{m} tX} \cdot e^{\frac{1}{m} tY} \right)^m \underset{\text{סגירות } G}{\in} G$$

אה, וכן, ו- $0 \in \mathfrak{g}$.

(2) נשים לב ש- (א) $\frac{d}{dt} \left(e^{tX} Y e^{-tX} \right) \Big|_{t=0} = XY - YX$ (כלל לייבניץ)

ו- (ב) $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$ ⇐ $gXg^{-1} \in \mathfrak{g}$ $\quad$ ($e^{tgXg^{-1}} = g e^{tX} g^{-1} \in G$)

לכן

$$XY - YX \overset{(א)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{e^{hX} Y e^{-hX} - Y}{h} \overset{(ב)}{\in} \mathfrak{g} \quad \square$$

אלגבראות לי

הגדרה: אלגברת לי מעל שדה F היא מרחב וקטורי L יחד עם פעולה הנקראת "סוגרי לי" $[\ ,\ ] : L \times L \to L$, המקיימת

1. $[\ ,\ ]$ בילינארי
2. $0 = [x,x] \quad \forall x \in L$
3. זהות יעקובי $[[x,y],z] + [[z,x],y] + [[y,z],x] = 0 \quad \forall x,y,z \in L$.

הערה: $(2') \Leftarrow (2)$ $\quad [x,y] = -[y,x] \quad \forall x,y \in L$ (עם $\Rightarrow$ כאשר המאפיין של $F \neq 2$).

מורפיזם של אלגבראות לי $\varphi : L \to L'$ הוא העתקה לינארית שמכבדת את התבנית.
כלומר, לכל $x,y \in L$ מתקיים $[\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x,y])$.

תרגיל: יהי F שדה ו-A F-אלגברה אסוציאטיבית. הראו ש- $[a,b] := a\cdot b - b\cdot a$
מגדיר על A מבנה של אלגברת לי. מסקנה - $M_n(F)$ היא אלגברת לי.

סימון: $ad_X : L \to L$ היא ההעתקה $ad_X(Y) = [X,Y]$.

תרגיל: הראו שניתן לנסח את זהות יעקובי ככלל לייבניץ:

$$ad_X([Y,Z]) = [ad_X(Y), Z] + [Y, ad_X(Z)]$$

דוגמאות

1. אם F שדה אז מבנה לי שמשרה על המטריצות $M_n(F)$ מהכפל הקומוטטורי.
מסומן גם $\mathfrak{gl}_n(F)$ (כקבוצה זה $M_n(F)$, רק שזוכרים את הכפל הקומוטטורי).

2. $$\mathfrak{sl}_n(F) = \{ X \in \mathfrak{gl}_n(F) \mid \mathrm{tr}(X) = 0 \}$$

3. אם $G = U(n) = \{ g \in GL_n(\mathbb{C}) \mid g^* = g^{-1} \}$ אז אלגברת הלי שלה היא

$$\mathfrak{u}(n) = \{ X \in M_n(\mathbb{C}) \mid \exp(tX) \in G \quad \forall t \in \mathbb{R} \}$$

$$\Updownarrow$$

$$\exp(tX)^* = \exp(tX^*) = \exp(-tX)$$

$$\mathfrak{u}(n) = \{ X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid X + X^* = 0 \}$$

תרגיל: הוכיחו ש- $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ ו- $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{u}(2) \cap \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ אינן איזומורפיות.

הקשר בין G ו- $Lie(G)$

משפט: תהיינה G ו- H תתי-חבורות סגורות של $GL_n(\mathbb{C})$ ויהיו $Lie(G)=\mathfrak{g}$, $Lie H=\mathfrak{h}$.
יהי $\Phi: G \to H$ הומומורפיזם רציף. אז יש הומומורפיזם יחיד של אלגבראות לי $\phi = Lie(\Phi): \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$
כך ש

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\Phi"] & H \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\phi"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathfrak{h} \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

אם $G \xrightarrow{\Phi} H \xrightarrow{\Psi} K$ מורפיזמים אז $Lie(\Psi)\circ Lie(\Phi) = Lie(\Psi\circ\Phi)$.

כלומר Lie : Lie groups $\to$ Lie algebras הוא פונקטור.

הוכחה: יהי $X \in \mathfrak{g}$ ונביט בהרכבה

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[r, "\Phi"] & H \\ \mathbb{R} \arrow[ur, "t \mapsto e^{tX}"] \arrow[urr, dashed, "t \mapsto \Phi(e^{tX})"'] & & \end{tikzcd}$$

אז $t \mapsto \Phi(e^{tX})$ חבורה חד פרמטרית ולכן יש $Z \in \mathfrak{h}$ יחיד כך ש-

$$e^{tZ} = \Phi(e^{tX}) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

נגדיר $\phi(X) := Z$. אם נציב $t=1$ נקבל $\Phi(e^{X}) = e^{\phi(X)}$.

ההוכחה כולה היא שימוש חוזר ביחידות החבורה החד פרמטרית המתאימה למטריצה נתונה ובנוסחאות המוכרות של Lie.

• ϕ הומוגנית: $\phi(\alpha X)=\alpha\phi(X)$ לכל $X\in\mathfrak{g}$ ולכל $\alpha\in\mathbb{R}$ כי

$$\forall t\in\mathbb{R}: \quad e^{t\phi(\alpha X)} = \Phi\left(e^{t\alpha X}\right) = e^{t\alpha\phi(X)}$$

• ϕ אדיטיבית: $\phi(X+Y)=\phi(X)+\phi(Y)$ $\quad\forall X,Y\in\mathfrak{g}$, כי

$$e^{t\phi(X+Y)} \overset{\text{הומוגניות}}{=} e^{\phi(tX+tY)} = \Phi\left(e^{tX+tY}\right)$$

$$\underset{\text{נוסחת המכפלה של Lie}}{=} \Phi\left(\lim_{m\to\infty}\left(e^{\frac{1}{m}tX}e^{\frac{1}{m}tY}\right)^m\right) \underset{\Phi \text{ הומו' רציף}}{=} \lim_{m\to\infty}\left(\Phi\left(e^{\frac{1}{m}tX}\right)\Phi\left(e^{\frac{1}{m}tY}\right)\right)^m$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(e^{\frac{1}{m}\phi(tX)}e^{\frac{1}{m}\phi(tY)}\right)^m = e^{t(\phi(X)+\phi(Y))}$$

• באופן דומה מוכיחים ש- $\quad \phi(gXg^{-1}) = \Phi(g)\phi(X)\Phi(g)^{-1} \quad \forall g\in G, \forall X\in\mathfrak{g}$

• $\phi([X,Y]) = [\phi(X),\phi(Y)] \quad \forall X,Y\in\mathfrak{g}$.

נזכר ש- $[X,Y] = \frac{d}{dt}\left(e^{tX}Ye^{-tX}\right)\Big|_{t=0}$, ואז

$$\phi([X,Y]) = \phi\left(\frac{d}{dt}\left(e^{tX}Ye^{-tX}\right)\right) = \frac{d}{dt}\phi\left(e^{tX}Ye^{-tX}\right)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\Phi\left(e^{tX}\right)\phi(Y)\Phi\left(e^{-tX}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{t\phi(X)}\phi(Y)e^{-t\phi(X)}\right)\Big|_{t=0} = [\phi(X),\phi(Y)]$$

• $Lie(\Phi\circ\Psi) = Lie(\Phi)\circ Lie(\Psi)$ כי

$$\Phi\circ\Psi\left(e^{tX}\right) = \Phi\left(\Psi\left(e^{tX}\right)\right) = \Phi\left(e^{t\psi(X)}\right) = e^{t\phi(\psi(X))}$$ □