העתקת האקספוננט: $\mathfrak{g} \xrightarrow{\exp} G$

תהא $G \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ ת"ח סגורה ו- $\mathfrak{g} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ האלגברה לי המתאימה.
אנחנו נצרכם את העתקת האקספוננט ולקבל $\exp: \mathfrak{g} \to G$, שאינה העתקה על ואינה חח"ע באופן כללי.

תרגיל: הראו ש- $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$ אינה בתמונת $\exp: sl_2(\mathbb{C}) \to SL_2(\mathbb{C})$.

משפט: תהא $G \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ ת"ח סגורה ותהא $\mathfrak{g} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ האלגברה לי המתאימה.
אז העתקת האקספוננט $\exp: \mathfrak{g} \to G$ היא הומאומורפיזם מקומי, כלומר, יש סביבה $0 \in \mathcal{U} \subseteq \mathfrak{g}$ וסביבה $1 \in V \subseteq G$ כך ש- $\exp: \mathcal{U} \simeq V$ הומאומורפיזם.

הוכחה:

1. נניח $\{h_m\} \subseteq G$ סדרה המתכנסת ל- 1. עבור m גדול, $Y_m := \log(h_m)$ מוגדר ונניח ש- $Y_m \neq 0$ וש- $Y_m/\|Y_m\| \to Y$. אז $Y \in \mathfrak{g}$.

הסבר: יש להראות ש- $\exp(tY) \in G$ לכל $t \in \mathbb{R}$. יהי $t \in \mathbb{R}$, כיוון ש- $Y_m \to 0$ יש סדרת שלמים a_m כך ש- $a_m\|Y_m\| \to t$, ולכן מסגירות G נקבל

$$\boxed{1} \qquad h_m^{a_m} = \exp(a_m Y_m) = \exp\left(a_m\|Y_m\| \cdot Y_m/\|Y_m\|\right) \longrightarrow \exp(tY) \in G$$

2. המכפלה הפנימית הסטנדרטית על $M_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$ נתונה ע"י $\langle A,B \rangle = tr(B^* A)$.
יהי $\mathfrak{g}^\perp \subseteq M_n(\mathbb{C})$ ה- $\mathbb{R}$-משלים הניצב ל- $\mathfrak{g}$.

תהא

$$\Phi : M_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^{\perp} \to GL_n(\mathbb{C})$$

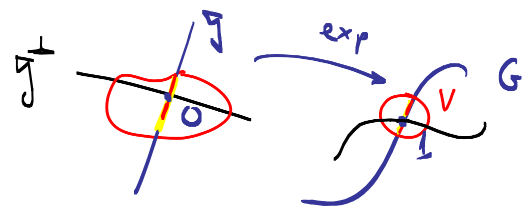
$$\Phi(X+Y) = e^{X}\cdot e^{Y}$$

אז Φ חלקה, והדיפרנציאל שלה ב- 0 הוא הזהות:

$$\frac{d}{dt}\left(\Phi(t(X+Y))\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(e^{tX}\cdot e^{tY}\right)\Big|_{t=0} = X+Y$$

לפי משפט ההעתקה ההפוכה Φ הפיכה מקומית בסביבת $\Phi(0) = 1\in GL_n(\mathbb{C})$.

נראה שקיימת סביבה $1\in V\subseteq GL_n(\mathbb{C})$ כך ש- $\log(V\cap G)\subseteq\mathfrak{g}$.



אחרת, נניח שאין V כזו. אז יש סדרה $g_m\in G$ $\to 1$ כך ש- $\log g_m\notin\mathfrak{g}$.

באמצעות Φ^{-1} נכתוב $g_m = e^{X_m}\cdot e^{Y_m}$ ו- $Y_m\to 0$, $Y_m\neq 0$. ונסמן $h_m := e^{Y_m}$.

אז $h_m\in G = e^{-X_m}\cdot g_m \to 1$. כיוון שכדור היחידה קומפקטי, עפ"י ת"ס של Y_m

כך ש- $Y_m/\|Y_m\| \to Y$ ולפי (1) $Y\in\mathfrak{g}$. וזו סתירה כי אז $0\neq Y\in\mathfrak{g}\cap\mathfrak{g}^{\perp}$.

3. נבחר סביבה $1\in V\subseteq GL_n(\mathbb{C})$ כזו ואז $\exp = \Phi : \mathcal{U}\times\{0\}\xrightarrow{\sim} G\cap V$ $\square$

מסקנות

1. אם $G \le GL_n(\mathbb{C})$ ת"ח סגורה קשירה אז כל $g \in G$ ניתן להצגה כ- $g = e^{X_1} e^{X_2} \cdots e^{X_m}$ עבור $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{g}$ מתאימים.

<u>הסבר:</u> יהא $\varphi : [0,1] \to G$ מסילה רציפה כך ש- $\varphi(0) = 1$ ו- $\varphi(1) = g$.

תהיינה $1 \in V \subseteq G$ ו- $0 \in \mathcal{U} \subseteq \mathfrak{g}$ סביבות כך ש- $\exp : \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} V$ הומיאומורפיזם.

מקומפקטיות, יש חלוקה $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ של $[0,1]$ כך שלכל i, $\varphi(t_i)^{-1} \varphi(t_{i+1}) \in V$.

ואז

$$g = \underbrace{\left(\varphi(t_0)^{-1} \varphi(t_1)\right)}_{e^{X_1}} \underbrace{\left(\varphi(t_1)^{-1} \varphi(t_2)\right)}_{e^{X_2}} \cdots \underbrace{\left(\varphi(t_{m-1})^{-1} \varphi(t_m)\right)}_{e^{X_m}}$$

2. נניח $\Phi_1, \Phi_2 : G \to H$ הומו' רציפים בין ת"ח סגורות של $GL_n(\mathbb{C})$ ו- G קשירה.

אם $\phi_1 = Lie(\Phi_1) = Lie(\Phi_2) = \phi_2$ אז $\Phi_1 = \Phi_2$.

<u>הסבר:</u> $\Phi_i(g) = \Phi_i\left(e^{X_1} \cdots e^{X_m}\right) = \Phi_i\left(e^{X_1}\right) \cdots \Phi_i\left(e^{X_m}\right) = e^{\phi_i(X_1)} \cdots e^{\phi_i(X_m)}$.

3. כל ת"ח סגורה G של $GL_n(\mathbb{C})$ היא חבורת לי (ליניארית).

<u>הסבר:</u> תהיינה $1 \in V \subset G$, $0 \in \mathcal{U} \subset \mathfrak{g}$ סביבות כך ש- $\exp : \mathcal{U} \simeq V$.

אז $g \in gV$ סביבה פתוחה של g ב- G ומתקיים $\underset{\mathfrak{g}}{\overset{\subseteq}{\mathcal{U}}} \xrightarrow{\sim} \underset{G}{\overset{\subseteq}{gV}}$, $X \mapsto g e^X$.

וכן, אם $x \in g_1 V \cap g_2 V$ העתקות המעבר הן $\exp$, וכפל ב- $g_i^{\pm 1}$ ולכן דיפאומורפיזם.

4. כל הומומורפיזם רציף בין חבורות לי לינאריות הוא חלק.

<u>הסבר:</u> נניח $\Phi: G \to H$ הומו' רציף. נקבע $g_0 \in G$ ונראה ש- Φ חלקה ב- g_0.

אם g קרוב ל- g_0 אז $g = g_0 e^X$ ולכן $\Phi(g) = \Phi(g_0) \cdot \exp(\phi(\log(g_0^{-1} g)))$.

$$\begin{tikzcd}
G \supset g_0V \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "g_0^{-1}\cdot"'] & & & \Phi(g_0V) \subset H \\
V \arrow[r, "\log"] & \mathfrak{g} \arrow[r, "\phi"] & \mathfrak{h} \arrow[r, "\exp"] & H \arrow[u, "\Phi(g_0)\cdot"']
\end{tikzcd}$$

העתקת ההצמדה Adjoint

תהא G חבורת לי לינארית עם אלגברת לי $\mathfrak{g}$. לכל $g \in G$ נסמן

$$Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$
$$X \mapsto gXg^{-1}$$

טענה: $Ad: G \to Aut_{Lie}(\mathfrak{g})$ מורפיזם של חבורות לי.

הוכחה: ברור ש- Ad הומו' של חבורות בפרט $(Ad_g)^{-1} = Ad_{g^{-1}}$.

הצמדה היא אוטומורפיזם של $M_n(\mathbb{C})$ כאלגברה אסוציאטיבית, בפרט היא משמרת את סוגריי לי ולכן $Ad_g \in Aut_{Lie}(\mathfrak{g})$.

ממשפט קודם יש העתקה יחידה, שנסמנה ad, המקיימת $\exp(\mathrm{ad}_X) = \mathrm{Ad}_{\exp(X)}$

לכל $X \in \mathfrak{g}$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\mathrm{Ad}"] & GL(\mathfrak{g}) \\
\mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\mathrm{ad}"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \arrow[u, "\exp"']
\end{tikzcd}$$

(בעניין הקודם נראה שהאלגברת-לי היא גם המרחב המשיק לחבורה ביחידה ל-ad
הוא הדיפרנציאל של Ad ביחידה)

טענה: לכל $X \in \mathfrak{g}$ מתקיים $\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y]$

הוכחה: ממשפט הקיום והיחידות

$$\mathrm{ad}_X = \frac{d}{dt}\left(\mathrm{Ad}_{\exp(tX)}\right)\Big|_{t=0}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{ad}_X(Y) = \frac{d}{dt}\left(e^{tX} Y e^{-tX}\right)\Big|_{t=0} = [X, Y]$$

$\square$