פירוש גיאומטרי של האלגברת לי

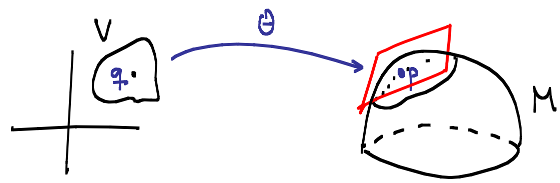
המרחב המשיק ליריעה חלקה בנקודה

מיד ניתן שלוש הגדרות שקולות למרחב המשיק ליריעה בנקודה.

לפני כן, ניתן הגדרה שאינה קנונית - אבל אינטואיטיבית.

הגדרה 0: נניח $M \subseteq \mathbb{R}^N$ יריעה חלקה, $p \in M$ ו- $p \in \mathcal{U} \subseteq M$ סביבת קואורדינטות

עם הומיאומורפיזם $\varphi : \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} V \subseteq \mathbb{R}^n$. נניח ש- $\theta := \varphi^{-1} : V \to \mathcal{U}$ חלקה.



אז המרחב המשיק ל- M ב- p הוא $T_p(M) := d\theta_q(\mathbb{R}^2_q) \subseteq \mathbb{R}^3_p$.

תרגיל: ההגדרה אינה תלויה במערכת הקואורדינטות שבחרנו סביב p.

נחפש הגדרות קנוניות שאינן תלויות בשיכון ובתמונות אלו.

הגדרה 1:

בהינתן יריעה חלקה M ו- $p \in M$ נסמן

$$C_p(M) = \{\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \mid \gamma(0) = p,\ \gamma \text{ חלקה}\}$$

זהו אוסף המסילות החלקות שעוברות דרך p.

נגדיר עליו יחס שקילות: $\gamma_1 \sim \gamma_2$ אם לאיזשהי מערכת קואורדינטות $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \subseteq M$ פתוחה $p \in$ מתקיים $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$.

תרגיל: יחס השקילות אינו תלוי במערכת $(\mathcal{U}, \varphi)$.

פתרון:

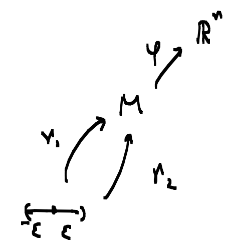
$$(\psi \circ \gamma_1)'(0) = (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi \circ \gamma_1(0)) \cdot (\varphi \circ \gamma_1)'(0)$$

$$(\psi \circ \gamma_2)'(0) = (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma_2)'(0) = (\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi \circ \gamma_2(0)) \cdot (\varphi \circ \gamma_2)'(0) \qquad \square$$

נסמן את קבוצת המנה ע"י $T_p(M) := C_p(M)/_{\sim}$, ומהתרגיל נראה שהיא מוגדרת היטב.

כדי להעניק ל-$T_p(M)$ מבנה של מרחב וקטורי, נבחר מערכת קואורדינטות $(\mathcal{U}, \varphi)$, ונגדיר

$$\varphi_* : T_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$[\gamma] \longmapsto (\varphi \circ \gamma)'(0)$$



φ_* מוגדרת היטב והיא גם חח"ע ועל:

(על) $\quad \forall v \in \mathbb{R}^n$, $\gamma_v : t \mapsto tv \longmapsto \varphi^{-1}(tv) \rightsquigarrow \varphi_*(\gamma_v) = v$

(1-1) $\quad (\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0) \iff [\gamma_1] = [\gamma_2]$

"נמשוך" את המבנה של $\mathbb{R}^n$ ל-$T_p(M)$ באמצעות φ_*:

$$\begin{cases} [\gamma_1] + [\gamma_2] := \varphi_*^{-1}\left(\varphi_*[\gamma_1] + \varphi_*[\gamma_2]\right) \\ \alpha[\gamma] := \varphi_*^{-1}\left(\alpha \cdot \varphi_*[\gamma]\right) \end{cases}$$

תרגיל: המבנה הוקטורי של $T_p(M)$ לא תלוי ב-$(\mathcal{U}, \varphi)$.

הגדרה 2: לכל $\mathcal{U}\subseteq M$ פתוחה נסמן ב- $C^\infty(\mathcal{U};\mathbb{R})$ את אוסף הפונקציות החלקות $\mathcal{U}\to\mathbb{R}$. לכל $p\in M$ נסמן

$$F_p(M) = \varinjlim_{\mathcal{U}\ni p} C^\infty(\mathcal{U};\mathbb{R}) = \text{אלגברת הנבטים של פונקציות חלקות ליד } p$$

$$= \left\{ (f,\mathcal{U}) \mid f:\mathcal{U}\to\mathbb{R} \text{ חלקה}, \ \mathcal{U}\subseteq M \text{ פתוחה} \right\} \big/ \sim$$

כאשר $(f_1,\mathcal{U}_1)\sim(f_2,\mathcal{U}_2)$ אם יש $V\subseteq \mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2$ פתוחה כך ש- $f_1|_V = f_2|_V$.

נסמן $I_p(M) = \{(f,\mathcal{U}) \mid f(p)=0\} \subseteq F_p(M)$.

אז $I_p(M)$ הוא האידיאל המקסימלי (היחיד) באלגברה $F_p(M)$

$$\begin{aligned} I_p(M) \hookrightarrow\ & F_p(M) \twoheadrightarrow \mathbb{R} \\ & [(f,\mathcal{U})] \mapsto f(p) \end{aligned}$$

נסמן ב- $\mathbb{R}_p$ את מודול המנה $F_p(M)/I_p(M) \cong \mathbb{R}$.

נגדיר
$$T_p(M) := \left(I_p(M) \big/ I_p(M)^2 \right)^*$$

הגדרה 3:
$$T_p(M) := \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}\left(F_p(M), \mathbb{R}_p \right)$$
$$= \left\{ X: F_p(M)\to\mathbb{R}_p \mid X \text{ ליניארית}, \ X(fg) = f(p)X(g) + g(p)X(f) \right\}$$

טענה: יש איזומורפיזם קנוני בין שלושת ההגדרות, נתון ע"י

$$C_p(M)/_{\sim} \longrightarrow Der_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}_p(M), \mathbb{R}_p) \longrightarrow \left(I_p(M)/I_p(M)^2\right)^*$$

$$[\gamma] \longmapsto \left((f,u) \mapsto \frac{d f\circ\gamma}{dt}\Big|_0\right)$$

$$X \longmapsto \left([f] \mapsto X(f)\right)$$

הוכחה: תרגיל. □

קצת אלגברה (מרחב משיק בהקשר כללי)

נניח k שדה, A k-אלגברה קומוטטיבית עם יחידה, M A-מודול.

נגדיר $Der_k(A,M) := \{ X : A \to M \mid X(ab) = aX(b) + bX(a),\ X$ k-לינארי $\}$

נשים לב ש- $X(k1_A) = 0$ (הנגזרת של קבוע היא אפס)

דוגמא: אם נחשוב על A כ- A מודול אפשר לומר $Der_k(A,A) \subseteq End_k(A)$.

ביחס למבנה לי המושרה $Der_k(A,A)$ היא תת-אלגברת לי.

נניח כעת ש- $\varphi : A \to B$ הומו' של k-אלגבראות, N B-מודול.

ונסמן $_\varphi N$ את המבנה של N כ- A-מודול המושרה מ- φ. אז נגדיר

$$\varphi^D : Der_k(B,N) \longrightarrow Der_k(A, {}_\varphi N)$$

$$X \longmapsto X\circ\varphi$$

ומתקיים $(\psi\circ\varphi)^D = \psi^D\circ\varphi^D$. זהו "כלל השרשרת":

אם $f: M \to N$ העתקה חלקה בין יריעות

$f^*: C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ ההומו' המושרה של האלגבראות

$f^*_p : F_{f(p)}(N) \to F_p(M)$ 'צמצומו' לאלגברת הנבטים

$df_p = (f^*_p)^D : Der_{\mathbb{R}}(F_p(M), \mathbb{R}_p) \longrightarrow Der_{\mathbb{R}}(F_{f(p)}(N), \mathbb{R}_{f(p)})$ הדיפרנציאל של f ב-p.

כלל השרשרת: $d(g\circ f)_p = dg_{f(p)}\circ df_p$