אלגבראות לי נילפוטנטיות ופתירות

הגדרה יהי F שדה. נאמר שמרחב וקטורי $\mathfrak{g}$ הוא <u>אלגברת לי</u> אם מוגדרת עליו תבנית בי־לינארית $[\cdot]\cdot : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ כך שלכל $x, y, z \in \mathfrak{g}$ מתקיים:

- $[x, x] = 0$
- $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$ (זהות יעקובי)

לכל אלגברה אסוציאטיבית A יש מבנה של אלגברת לי הנתון על ידי: $[x, y] = xy - yx$.

הגדרה הומומורפיזם של אלגבראות לי הוא העתקה לינארית $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ כך שמתקיים $\forall x, y \in \mathfrak{g} \quad \phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$.

הגדרה תהא $\mathfrak{g}$ אלגברת לי. לכל $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \subseteq \mathfrak{g}$ תתי־מרחבים נסמן

$$[\mathfrak{u}, \mathfrak{v}] = \mathrm{Span}_F\{[u, v] \mid u \in \mathfrak{u}, v \in \mathfrak{v}\}$$

נאמר שתת־מרחב $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ הוא <u>אידאל</u> אם $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}$.

תרגיל

1. הראו שגרעין של הומומורפיזם של אלגבראות לי הוא אידאל. הראו שתמונתו של הומומורפיזם היא תת־אלגברת לי של הטווח.
2. אם $\mathfrak{a}$ אידאל ב־$\mathfrak{g}$ אז מרחב המנה $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ הוא אלגברת לי כאשר לכל $x, y \in \mathfrak{g}$ נגדיר את הפעולה $[x + \mathfrak{a}, y + \mathfrak{a}] = [x, y] + \mathfrak{a}$.

הגדרה הסדרה המרכזית התחתונה היא סדרת תתי־המרחבים:

$$C^1\mathfrak{g} = \mathfrak{g},\ \ C^2\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \dots C^n\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^{n-1}\mathfrak{g}]$$

הסדרה הנגזרת היא סדרת תתי־המרחבים:

$$D^1\mathfrak{g} = \mathfrak{g},\ \ D^2\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \dots D^n\mathfrak{g} = [D^{n-1}\mathfrak{g}, D^{n-1}\mathfrak{g}]$$

$\mathfrak{g}$ נקראת <u>נילפוטנטית</u> אם קיים n כך ש־ $C^n\mathfrak{g} = 0$.
$\mathfrak{g}$ נקראת <u>פתירה</u> אם קיים n כך ש־ $D^n\mathfrak{g} = 0$.

תרגיל

לכל n טבעי, תתי־המרחבים $C^n\mathfrak{g}$ ו־$D^n\mathfrak{g}$ הם אידאלים ב־$\mathfrak{g}$ וכן $D^n\mathfrak{g} \subseteq C^n\mathfrak{g}$.
הסיקו כי כל חבורה נילפוטנטית היא פתירה.

פתרון

תחילה נשים לב ש־ $C^{n+1}\subseteq C^n\mathfrak{g}$ מכיוון שאם $x\in C^{n+1}\mathfrak{g}$ אז

$$x=[x_1,[\dots[x_{n-1},[x_n,x_{n+1}]]]]=[x_1,[\dots[x_{n-1},x_n']]]\in C^n\mathfrak{g}$$

ולכן מהגדרה $C^n\mathfrak{g}\subseteq C^{n+1}\mathfrak{g}=[g,C^n\mathfrak{g}]$.

נטפל ב־D^n. נניח באינדוקציה ש־ D^{n-1} אידאל וכן $D^{n-1}\subseteq C^{n-1}$.
כיוון ש־ $D^{n-1}\subseteq\mathfrak{g},C^{n-1}$ מתקבל

$$D^n=[D^{n-1},D^{n-1}]\subseteq[\mathfrak{g},C^{n-1}]=C^n$$

וכן מזהות יעקובי ומההנחה ש־D^{n-1} אידאל

$$\begin{aligned}[\mathfrak{g},D^n]&=[\mathfrak{g},[D^{n-1},D^{n-1}]]\\&\subseteq[D^{n-1},[\mathfrak{g},D^{n-1}]]+[D^{n-1},[D^{n-1},\mathfrak{g}]]\\&=[D^{n-1},D^{n-1}]+[D^{n-1},D^{n-1}]\\&=D^n\end{aligned}$$

דוגמאות

1. אם $\mathfrak{g}$ אבלית ($[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=0$) אז $\mathfrak{g}$ נילפוטנטית.
2. אוסף המטריצות המשולשיות ממש (עם 0 באלכסון) מסדר $n\times n$ מעל שדה F הוא אלגברת לי נילפוטנטית.
3. אוסף המטריצות המשולשיות הוא אלגברת לי פתירה.

ניתן לנסח את 2 ו־3 באופן שקול: יהי V מרחב וקטורי ממימד n מעל F. יהי $\mathcal{F}$ דגל מלא על V, כלומר:

$$\mathcal{F}=(0\subsetneq V_1\subsetneq V_2\subsetneq\cdots\subsetneq V_{n-1}\subsetneq V)$$

תהא $\mathfrak{n}(\mathcal{F})$ תת־האלגברה של $\mathrm{End}(V)$ הכוללת את כל האופרטורים המקיימים $X(V_i)\subseteq X(V_{i-1})$. אז $\mathfrak{n}(\mathcal{F})$ נילפוטנטית.
באופן דומה, $\mathfrak{b}(\mathcal{F})$ תת־האלגברה של $\mathrm{End}(V)$ הכוללת את כל האופרטורים המקיימים $X(V_i)\subseteq V_i$, היא פתירה.
זאת כיוון שתחת קביעת בסיס $B=\{v_i\}_{i=1}^n$ למרחב V כך ש־ $v_i\in V_i\setminus V_{i-1}$, מתקבל זיהוי של $\mathfrak{n}(\mathcal{F})$ עם אלגברת המטריצות המשולשיות ממש ושל $\mathfrak{b}(\mathcal{F})$ עם אלגברת המטריצות המשולשיות ע"י התאמת המטריצה המייצגת לפי B לכל אופרטור.

הגדרה <u>הצגה</u> של אלגברת לי היא הומומורפיזם של אלגבראות לי $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ (כאשר V מרחב וקטורי ו־$\mathrm{End}(V)$ אלגברה אסוציאטיבית ביחס להרכבה).
באופן מפורש, לכל $X, Y \in \mathfrak{g}$ ו־$v \in V$:

$$\rho([X,Y])(v) = \rho(X)(\rho(Y)(v)) - \rho(Y)(\rho(X)(v))$$

לרוב נשמיט את ρ ונכתוב פשוט $X(v) = \rho(X)(v)$

תרגיל
הראו שההעתקה $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ כאשר לכל $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$\mathrm{ad}(X)(Y) = \mathrm{ad}_X(Y) = [X,Y]$$

היא הצגה של $\mathfrak{g}$.

פתרון
נובע מאנטי־סימטריות ומזהות יעקובי.

<u>אלגבראות לי נילפוטנטיות</u>

הבחנה אם X אופרטור נילפוטנטי על V, אז ad_X אופרטור נילפוטנטי על $End(V)$.
נגדיר L_X, R_X אופרטורים על $\mathrm{End}(V)$ על ידי:

$$L_X(Y) = XY \qquad\qquad R_X(Y) = YX$$

מכך ש־X נילפוטנט על V נובע כי L_X, R_X נילפוטנטים על $\mathrm{End}(V)$. כיוון שחיבור של נילפוטנטים המתחלפים בכפל גם הוא נילפוטנט, גם $(L_X - R_x)$ נילפוטנט. אבל

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_X(Y) &= [X,Y] = XY - YX \\ &= L_X(Y) - R_X(Y) = (L_X - R_X)(Y)\end{aligned}$$

משפט 1
$\mathfrak{g}$ נילפוטנטית $\iff$ ad_X אופרטור נילפוטנטי לכל $X \in \mathfrak{g}$.

משפט 2 (Engel)
תהי $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ הצגה של $\mathfrak{g}$ כך ש־$\rho(X)$ נילפוטנטי לכל $X \in \mathfrak{g}$, אז קיים דגל $\mathcal{F}$ ב־V כך ש־$\rho(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{n}(\mathcal{F})$.

המשמעות של משפט 2: אם לכל $X \in \mathfrak{g}$ קיים דגל $\mathcal{F}_X$ כך ש־ $\rho(X)V_{x,i} \subseteq V_{x,i-1}$ אז קיים דגל אחד שעובד במשותף לכל איברי $\mathfrak{g}$.

משפט $2'$
תחת ההנחות של משפט 2, אם $V \neq 0$ אז קיים $0 \neq v \in V$ כך שלכל $X \in \mathfrak{g}$ מתקיים $\rho(X)v = 0$.

נראה שמשפט 2 גורר את משפט 1:

הוכחה אם $\mathfrak{g}$ נילפוטנטית אז בבירור ad_X נילפוטנטי לכל $X \in \mathfrak{g}$ (שכן תמונת $(\mathrm{ad}_X)^n$ חלקית ל־ $C^{n+1}\mathfrak{g}$).
לצד השני, אם ad_X נילפוטנט לכל $X \in \mathfrak{g}$ אז ממשפט 2 על ההצגה $ad : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ קיים דגל מלא

$$\mathcal{F} = (0 \subsetneq \mathfrak{a}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{a}_n = \mathfrak{g})$$

כך שלכל $X \in \mathfrak{g}$ מתקיים $[X, \mathfrak{a}_i] = \mathrm{ad}_X(\mathfrak{a}_i) \subseteq \mathfrak{a}_{i-1}$. כלומר $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_i] \subseteq \mathfrak{a}_{i-1}$.
אז באינדוקציה $C^m\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{a}_{n-m}$ ו־$\mathfrak{g}$ נילפוטנטית.

נראה שמשפט $2'$ גורר את משפט 2:

הוכחה באינדוקציה על המימד של V, אם קיים $0 \neq v \in V$ כך ש־$\rho(X)v = 0$ לכל $X \in \mathfrak{g}$ אז ρ משרה הצגה על $\bar{V} = V/Fv$. מההנחה, $\rho(X)$ נילפוטנטי על V לכל $X \in \mathfrak{g}$ ובפרט, $\rho(X)$ נילפוטנטי על $\bar{V}$ לכל $X \in \mathfrak{g}$.
מהנחת האינדוקציה, קיים ל־$\bar{V}$ דגל מלא:

$$\bar{\mathcal{F}} = (\bar{0} \subsetneq \bar{V}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \bar{V}_{n-2} \subsetneq \bar{V})$$

כך ש־ $\rho(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{n}(\bar{\mathcal{F}})$. התמונה ההפוכה של דגל זה תחת ההעתקה $V \to V/Fv$ היא

$$\mathcal{F} = (0 \subsetneq Fv \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{n-2} \subsetneq V)$$

שהוא דגל מלא על V כך ש־$\rho(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{n}(\mathcal{F})$ כנדרש.

אם כן נוכיח את משפט $2'$:

הגדרה תהא $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$ תת־אלגברה, נגדיר את $\mathfrak{u}(\mathfrak{h})$, המנרמל של $\mathfrak{h}$ ב־$\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{u}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}_X(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{h}\}$$

נשים לב כי $\mathfrak{u}(\mathfrak{h})$ היא תת־אלגברה של $\mathfrak{g}$ (סגירות נובעת מזהות יעקובי) המכילה את $\mathfrak{h}$, וכן $\mathfrak{h}$ אידאל בה. למעשה זוהי תת־האלגברה הגדולה ביותר בעלת תכונות אלו.

הנחות ומסקנות המשפט עוסקות רק בתמונת $\mathfrak{g}$ תחת ρ, לכן מעתה נחליף את $\mathfrak{g}$ בתמונתה ונניח כי $\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{End}(V)$ וכל איברי $\mathfrak{g}$ הם אופרטורים נילפוטנטים. מההבחנה נובע כי לכל $X \in \mathfrak{g}$ מתקיים כי ad_X הוא אופרטור נילפוטנטי על $\mathfrak{g}$.
באינדוקציה על המימד של $\mathfrak{g}$, נניח כי המשפט מתקיים לכל $\mathfrak{h}$ תת־אלגברה ממש של $\mathfrak{g}$.

טענה 1 לכל $\mathfrak{g} \subsetneq \mathfrak{h}$ מתקיים $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{u}(\mathfrak{h})$.

הוכחה נשים לב כי $\mathfrak{h}$ פועלת באמצעות העתקות נילפוטנטיות על $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ (העתקות ה־ad) ולכן מהנחת האינדוקציה קיים וקטור

$$\bar{0} \neq \bar{X} = X + \mathfrak{h} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$$

כך שעבור כל $Y \in \mathfrak{h}$ מתקיים $\mathrm{ad}_Y(X) + \mathfrak{h} = \mathrm{ad}_Y(\bar{X}) = \bar{0}$, כלומר $\mathrm{ad}_Y(X) \in \mathfrak{h}$. בפרט, $\mathrm{ad}_X(Y) = -\mathrm{ad}_Y(X) \in \mathfrak{h}$, לכן $X \in \mathfrak{u}(\mathfrak{h})$. אולם בחרנו $X \notin \mathfrak{h}$ ולכן בפרט $\mathfrak{u}(\mathfrak{h}) \neq \mathfrak{h}$.

טענה 2 אם $\mathfrak{g} \neq (0)$ אז קיים אידאל $\mathfrak{g} \subsetneq \mathfrak{h}$ מקו־מימד 1 ב־$\mathfrak{g}$.

הוכחה תהי $\mathfrak{g} \subsetneq \mathfrak{h}$ תת־אלגברה מקסימלית של $\mathfrak{g}$. אז מטענה 1 המנרמל שלה הוא כל $\mathfrak{g}$ ומהגדרת $\mathfrak{u}(\mathfrak{h})$ נובע כי $\mathfrak{h}$ אידאל ב־$\mathfrak{g}$. נבחר שרירותית $X \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$, אז לכל $a, b \in F$ ו־$H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$:

$$[aX + H_1, bX + H_2] = ab[X, X] + ([aX + H_1, H_2] + [H_1, bX]) = 0 + H' \in \mathfrak{h}$$

כלומר $FX + \mathfrak{h}$ היא תת־אלגברה של $\mathfrak{g}$ המכילה את $\mathfrak{h}$. מכיוון ש־$\mathfrak{h}$ תת־אלגברה מקסימלית נקבל כי $\mathfrak{g} = FX + \mathfrak{h}$.

נקבע $\mathfrak{h}$ כמובטח מטענה 2 ונקבע איזשהו $Y \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$. נגדיר $W = \{x \in V \mid \mathfrak{h}(v) = 0\}$. אז W הוא תת־מרחב של V וכן $Y(W) \subseteq W$ שכן לכל $v \in W$ מתקיים

$$\forall H \in \mathfrak{h} \quad HYv = YHv - [Y, H]v = 0$$

כלומר, $Yv \in W$.
מהנחת האינדוקציה על $\mathfrak{h}$ נובע כי $W \neq \{0\}$. מכיוון ש־Y נילפוטנטי ו־$Y(W) \subseteq W$ נובע כי קיים $0 \neq w \in W$ כך ש־$Y(w) = 0$. אז w מתאפס ע"י $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + FY$.

<u>אלגבראות לי פתירות</u>

תזכורת ־ דוגמא של אלגברת לי פתירה: אם $\mathcal{F} = (V_i)$ דגל מלא ב־V אז

$$\mathfrak{b}(\mathcal{F}) = \{X \in \mathrm{End}(V) \mid \forall i \ XV_i \subseteq V_i\}$$

משפט (Lie)
תהא $\mathfrak{g}$ אלגברת לי פתירה מעל שדה סגור אלגברית ממציין 0. תהי $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ הצגה של $\mathfrak{g}$. אז קיים דגל מלא $\mathcal{F} = (V_i)$ ב־V כך ש־ $\rho(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{b}(\mathcal{F})$.

הוכחה בדיוק כפי שהוכחנו במקרה הנילפוטנטי, המשפט נובע מהמשפט הבא:

משפט 3
תחת הנחות משפט Lie, אם $V \neq (0)$ אז קיים $0 \neq v \in V$ שהוא וקטור עצמי של $\rho(X)$ לכל $X \in \mathfrak{g}$.

נשים לב של־ρ כמתואר, יש העתקה $\delta : \mathfrak{g} \to F$ כך ש־$\rho(X)v = \delta(X)v$.
על מנת להוכיח את משפט 3, תחילה נוכיח למה:

למה תהא $\mathfrak{g}$ אלגברת לי מעל שדה F ממציין 0, $\mathfrak{h}$ אידאל ב־$\mathfrak{g}$, ו־ V הוא מרחב וקטורי ממימד סופי וכן $\mathfrak{g}$־מודול (כלומר, $\mathfrak{g}$ פועלת על V באמצעות הצגה). אם $0 \neq v \in V$ כך שקיימת $\delta : \mathfrak{h} \to F$ המקיימת $hv = \delta(h)v$ לכל $h \in \mathfrak{h}$, אז $\delta([X,h]) = 0$ לכל $h \in \mathfrak{h}$ ו־$X \in \mathfrak{g}$.

הוכחה יהי $X \in \mathfrak{g}$ כלשהו, נסמן $V_i = \mathrm{Span}_F\{X^j v \mid 0 \leq j < i\}$.
בבירור לכל i מתקיים $V_i \subseteq V_{i+1}$ ומכיוון ש־V ממימד סופי, קיים n מינימלי כך ש־ $V_n = V_{n+k}$ לכל k טבעי.
נראה (באינדוקציה על i), שלכל $0 \leq i \leq n$ מתקיים שלכל $h \in \mathfrak{h}$

$$hX^i v = \delta(h)X^i v \quad (mod\ V_i)$$

עבור $i = 0$ נקבל מההנחה $hv = \delta(h)v$ בדיוק.
עבור $i > 0$:

$$\begin{aligned} hX^i v = hXX^{i-1}v &= XhX^{i-1}v - [X,h]X^{i-1}v \\ &= X(\delta(h)X^{i-1}v + v') - h'X^{i-1}v \\ &= \delta(h)X^i v + (Xv' - \delta(h')X^{i-1}v) \end{aligned}$$

מכיוון ש־$v' \in V_{i-1}$ מתקיים ש־$Xv' \in V_i$ ולכן באמת $hX^i v = \delta(h)X^i v (mod\ V_i)$.

אז ביחס לבסיס $\{v, Xv, \ldots, X^{n-1}v\}$ למרחב V_n קיבלנו שאופרטור $h \in \mathfrak{h}$ הוא משולשי עם $\delta(h)$ על האלכסון, כלומר $\mathrm{Tr}(h|_{V_n}) = n\delta(h)$. במקרה של $[X,h] \in \mathfrak{h}$ נקבל

$$\begin{aligned} n\delta([X,h]) &= \mathrm{Tr}([X,h]) \\ &= \mathrm{Tr}(Xh - hX) \\ &= \mathrm{Tr}(Xh) - \mathrm{Tr}(hX) = 0 \end{aligned}$$

מכיוון ש־F ממציין 0, נובע כי $\delta([X,h]) = 0$.

הוכחת משפט 3:

נוכיח באינדוקציה על המימד של $\mathfrak{g}$: כיוון ש־$\mathfrak{g}$ פתירה, מתקיים $D\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$.
נקבע $\mathfrak{h}$ תת־מרחב של $\mathfrak{g}$ מקו־מימד 1 המכיל את $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, אז $\mathfrak{h}$ אידאל ב־$\mathfrak{g}$.
באינדוקציה, קיים $0 \neq v \in V$ ו־$\delta : \mathfrak{h} \to F$ כך שלכל $h \in \mathfrak{h}$ מתקיים $hv = \delta(h)v$.
נגדיר את תת־המרחב

$$W = \{w \in V \mid \forall h \in \mathfrak{h}\ hw = \delta(h)w\}$$

אז W איננו ריק וכן מהלמה נובע כי $gW \subseteq W$:
יהיו $w \in W$ ו־$X \in \mathfrak{g}$ אז לכל $h \in \mathfrak{h}$ מתקיים

$$\begin{aligned} hXw &= Xhw - [X,h]w \\ &= \delta(h)Xw - \delta([X,h])w = \delta(h)Xw \end{aligned}$$

כלומר $Xw \in W$.
כעת, יהי $X \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$. כיוון ש־$X : W \to W$ ו־F סגור אלגברית, יש ל־X וקטור עצמי $v_0 \in W$, וזהו וקטור עצמי לכל האלגברה $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + FX$.

הערה הדרישה במשפט שהמציין שווה ל־0 אינה מיותרת. למשל, האלגברה

$$sl_2(\bar{\mathbb{F}}_2) = \{A \in M_n(\bar{\mathbb{F}}_2) \mid \mathrm{Tr}(A) = 0\}$$

היא נילפוטנטית, אבל בהצגה הסטנדרטית שלה על $\bar{\mathbb{F}}_2^2$ אין וקטור עצמי משותף.

מסקנה 1 אם $\mathfrak{g}$ אלגברת לי פתירה מעל שדה סגור אלגברית ממציין 0, אז קיים ב־$\mathfrak{g}$ דגל מלא של אידאלים. זה נובע משימוש במשפט Lie להצגת ה־ad.

מסקנה אם $\mathfrak{g}$ פתירה מעל שדה F ממציין 0, אז $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ נילפוטנטית.

הוכחה בטענות מסוג זה ניתן להניח שהשדה סגור אלגברית, כי אם $F \subseteq F'$ הרחבת שדות ואם נסמן $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \otimes_F F'$ אז $\mathfrak{g}'$ היא אלגברת לי מעל F' עם הפעולה

$$[X_1 \otimes f_1, X_2 \otimes f_2] = [X_1, X_2] \times f_1 f_2$$

ובנוסף $\mathfrak{g}$ פתירה (נילפוטנטית) אס"ם $\mathfrak{g}'$ פתירה (נילפוטנטית) וכן $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]' = [\mathfrak{g}',\mathfrak{g}']$.

כעת מתוצאה 1, קיים דגל מלא של אידאלים $\mathfrak{g}_n = \mathfrak{g} \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{g}_1 \supsetneq (0)$. נשים לב כי לכל i ולכל $X \in \mathfrak{g}$ מתקיים $\mathrm{ad}_X \in \mathrm{End}(\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i-1})$.

מכך ומהעובדה ש־ $\mathrm{End}(\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i-1}) = F$ היא אבלית נובע כי לכל $X = [X_1, X_2] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ולכל $\bar{G} \in \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i-1}$ מתקיים

$$\begin{aligned}[X, \bar{G}] = [[X_1, X_2], \bar{G}] &= [X_2, [\bar{G}, X_1]] + [X_1, [X_2, \bar{G}]] \\ &= [X_1, [X_2, \bar{G}]] - [X_2, [X_1, \bar{G}]] \\ &= \mathrm{ad}_{X_1} \mathrm{ad}_{X_2}(\bar{G}) - \mathrm{ad}_{X_2} \mathrm{ad}_{X_1}(\bar{G}) = 0\end{aligned}$$

כלומר $\mathrm{ad}_X(\mathfrak{g}_i) \subseteq \mathfrak{g}_{i-1}$. לכן ad_X נילפוטנטי על $\mathfrak{g}$ ובפרט על $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. הדבר נכון לכל $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, ולכן זוהי אלגברת לי נילפוטנטית ממשפט Engel.

הערה הכיוון השני ברור - אם $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ נילפוטנטית אז בוודאי $\mathfrak{g}$ פתירה.

תזכורת מאלגברה לינארית ־ פירוק ז'ורדן

יהי F שדה סגור אלגברית ממציין 0. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל F. איבר $u \in \mathrm{End}(V)$ נקרא פשוט למחצה אם הוא לכסין.

טענה 3 לכל $u \in \mathrm{End}(V)$ קיים ויחיד זוג $s, n \in \mathrm{End}(V)$ כך ש־s פשוט למחצה ו־n נילפוטנטי כך ש־$u = s + n$ וגם $sn = ns$. בנוסף, קיימים פולינומים S, N (התלויים ב־u) ללא מקדם חופשי כך ש־$S(u) = s$ ו־$N(u) = n$.

הוכחה יהי $det(X - u) = \prod (X - \lambda_i)^{m_i}$ פירוק של הפולינום האופייני של u למכפלת גורמים זרים $(X - \lambda_i)^{m_i}$. נסמן $V_i = ker((u - \lambda_i)^{m_i})$, אז ממשפט הפירוק הפרימרי: $V = \bigoplus V_i$, $dimV_i = m_i$, $uV_i \subseteq V_i$.
נניח ש־$u = s + n$ הוא פירוק כמבוקש, כך ש־$sn = ns$. מכיוון ש־s מתחלף עם עצמו ועם n, נובע כי s מתחלף עם u, ולכן גם עם כל פולינום ב־u. בפרט:

$$\begin{aligned}v \in V_i \implies& (u - \lambda_i)^{m_i}(s(v)) = s((u - \lambda_i)^{m_i}(v)) = 0 \\ \implies& s(v) \in V_i\end{aligned}$$

אז $sV_i \subseteq V_i$. נטען כי ל־s ול־u בדיוק אותם ערכים עצמיים - כיוון ש־$(u-s)$ נילפוטנטית, נאמר מסדר k, אם $s(v) = \lambda v$ אז

$$0 = (u - s)^k(v) = (u - \lambda I)^k(v)$$

כלומר $ker(u - \lambda I)$ אינו ריק ו־λ הוא ערך עצמי של u. באופן זהה, כל ערך עצמי של u הוא גם ערך עצמי של s. אם נצטמצם למרחב V_i, אז כיוון שהמרחב אינוואריאנטי גם ל־s וגם ל־u, נקבל מאותם שיקולים כי ל־u ול־s בדיוק אותם ערכים עצמיים במרחב V_i, כלומר λ_i בלבד. כיוון שצמצום של לכסין למרחב אינוואריאנטי הוא לכסין, נסיק כי $s|_{V_i} = \lambda_i \cdot Id_{V_i}$.

מן הצד השני, אם נגדיר בדיוק באופן זה את s, נקבל כי s ו־$n = (u - s)$ מקיימים את התכונות המבוקשות, שכן הן מתקיימות לצמצומים של s ו־u לכל V_i.

נגדיר בעזרת משפט השאריות הסיני את $S(x)$ להיות פולינום המקיים לכל i:

1. $S(X) \equiv \lambda_i \ (mod \ (X - \lambda_i)^{m_i})$
2. $S(X) \equiv 0 \ (mod \ X)$

אז בודאי $S(0) = 0$ ומתקיים ל־$v \in V_i$

$$\begin{aligned}(S(u))(v) &= P(u) \cdot (u - \lambda_i)^{m_i}(v) + \lambda_i v \\ &= \lambda_i v = s(v)\end{aligned}$$

כלומר $S(u) = u$. נגדיר גם $N(X) = X - S(X)$ ואז בבירור $N(0) = 0$ וכן

$$N(u) = u - S(u) = u - s = n$$

הבחנה יהי $u : V \to V$ אופרטור ו־$A \subseteq B \subseteq V$ תתי־מרחבים כך ש־$uB \subseteq A$. אז לכל פולינום $P(X)$ בלי איבר חופשי מתקיים $P(u)B \subseteq A$.

מסקנה ל־u כמו בהבחנה, אם $u = s + n$ פירוק כמו בטענה אז $sB \subseteq A$ וגם $nB \subseteq A$.