פתירות ופשטות למחצה

משפט (קריטריון קרטן לפתירות):

יהי k שדה ממציין אפס, V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל k, $\mathfrak{g} \subset End(V)$ תת-אלגברת לי.
אז התנאים הבאים שקולים

(1) $\mathfrak{g}$ פתירה.

(2) $Tr(xy)=0$ לכל $x \in \mathfrak{g}$ ו- $y \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.

הכנה: אלגברה לינארית

V מרחב ממימד סופי מעל שדה סגור אלגברית k.

משפט (פירוק ז'ורדן):

לכל $u \in End(V)$ יש $s,n \in End(V)$ יחידים כך ש- s פשוט למחצה (=לכסין) n נילפוטנטי, $u=s+n$, $sn=ns$. יתר על כן, יש $S,N \in k[t]$ כך ש- $0=S(0)=N(0)$ ו- $s=S(u)$, $n=N(u)$. (נקרא לפירוק זה פירוק ז'ורדן הקנוני.)

מסקנה: נניח $u=s+n$ פירוק קנוני ונניח $A \subset B \subset V$ תתי מרחבים כך ש- $uB \subset A$. אז $sB \subset A$ ו- $nB \subset A$.

נסמן $V^* = Hom_k(V,k)$ וכן $V_{p,q} = \underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{q}$.

אז $V_{p,q} \circlearrowleft \mathrm{End}(V)$ ל׳ - מועל:

$$\mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathrm{End}(V_{p,q})$$
$$\cong$$
$$\mathrm{End}(V)\otimes\cdots\otimes\mathrm{End}(V)\otimes\mathrm{End}(V^*)\otimes\cdots\otimes\mathrm{End}(V^*)$$

$$u \longmapsto u_{p,q} := \underset{1}{u}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1 + 1\otimes \underset{2}{u}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1 + \cdots + 1\otimes\cdots\otimes \underset{p}{u}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1$$
$$-\left(1\otimes\cdots\otimes 1\otimes \underset{p+1}{u^*}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1 + \cdots + 1\otimes\cdots\otimes 1\otimes \underset{p+q}{u^*}\right)$$

כאשר $u^*: V^* \to V^*$ הדואל של u.

תרגיל: בידקו שני הגדרות. דרך 1: ישירות. דרך 2: דונו ב- $V_1 \otimes V_2$ מכפלה של שתי הצגות של אלגברת לי $\mathfrak{g}$ וב- V^* - הדואל.

תרגיל: הראו שבמקרה המיוחד $p=q=1$ מקבלים $V_{1,1} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{End}(V)$ האיזומורפיזם הקנוני של מרחבים וקטוריים ושהוא גם איזו׳ של הצגות

$$\mathrm{End}(V\otimes V^*) \simeq \mathrm{End}(\mathrm{End}(V))$$
$$u_{1,1} \longmapsto \mathrm{ad}\, u$$

למה: אם $u = n+s$ הפירוק הקנוני אז $u_{p,q} = n_{p,q} + s_{p,q}$ הפירוק הקנוני של $u_{p,q}$.

הוכחה: $s_{p,q}$ פ״ל כי אם (x_i) בסיס ו״ע של V אז (x_i^*) בסיס של ו״ע ל- s^* ולכן $(x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_p}\otimes x_{j_1}^*\otimes\cdots\otimes x_{j_q}^*)$ בסיס של ו״ע ל- $V_{p,q}$ ו- $s_{p,q}$ לכסין.

$n_{p,q}$ נילפוטנטי כי הוא סכום של איברים כמו $1\otimes\cdots\otimes n\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1$ ו- $1\otimes\cdots\otimes n^*\otimes\cdots\otimes 1$ שהם נילפוטנטים ומתחלפים.

$s_{p,q}$ ו- $n_{p,q}$ מתחלפים כי $[s_{p,q}, n_{p,q}] = [s,n]_{p,q} = 0$ ($a \mapsto a_{p,q}$ הצגה).

$u_{p,q} = s_{p,q} + n_{p,q}$ כי $u \mapsto u_{p,q}$ לינארית. □

מכאן $\mathrm{char}(k) = 0$

הגדרה: עבור $\phi : k \to k$ $\mathbb{Q}$-לינארית ו- $s \in End(V)$ פשוט למצוא עם פירוק $V = \bigoplus_i V_i$, $s|_{V_i} = \lambda_i$, נסמן $\phi(s) : V \to V$, $\phi(s)|_{V_i} = \phi(\lambda_i)$.

למה: $\phi(s_{p,q}) = (\phi(s))_{p,q}$.

הוכחה: $V_{p,q}$ הוא סכום ישר של ת"מ מהצורה $V_{i_1}\otimes\cdots\otimes V_{i_p}\otimes V_{j_1}^*\otimes\cdots\otimes V_{j_q}^*$, ועל כזה:

$s_{p,q}$ פועל כמו $\lambda_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_p} - \lambda_{j_1} + \cdots + -\lambda_{j_q}$

$\phi(s_{p,q})$ פועל כמו $\phi(\lambda_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_p} - \lambda_{j_1} - \cdots - \lambda_{j_q})$ $=$ כי ϕ $\mathbb{Q}$-לינארית

$(\phi(s))_{p,q}$ פועל כמו $\phi(\lambda_{i_1}) + \cdots + \phi(\lambda_{i_p}) - \phi(\lambda_{j_1}) - \cdots - \phi(\lambda_{j_q})$ □

מסקנה: נניח ש- $u = s+n$ פירוק קנוני ל- $u \in End(V)$. נניח $A, B \subseteq V_{p,q}$ ת"מ מרחבים כך ש- $u_{p,q} B \subset A \subset B$ אז לכל $\phi : k \to k$ $\mathbb{Q}$-לינארית מתקיים $\phi(s)_{p,q} B \subset A$.

למה: נניח $u = s + n$ פירוק קנוני ל- $u \in End(V)$. אז

$$\forall \phi \in Hom_{\mathbb{Q}}(k,k) \quad Tr(u\cdot\phi(s)) = 0 \quad \Rightarrow \quad u$$ נילפוטנטי.

הוכחה: אם $V = \bigoplus_i V_i$, $\dim V_i = m_i$, $s|_{V_i} = \lambda_i$ אז

$$(*) \qquad Tr(u\cdot\phi(s)) = \sum m_i \lambda_i \phi(\lambda_i) = 0 \qquad \forall \phi \in Hom_{\mathbb{Q}}(k,k)$$

אם ה- ϕ-ים המקיימים $\phi(k) \subseteq \mathbb{Q}$ אפשר להפעיל את ϕ על $(*)$ ולקבל

$$\sum_i m_i (\phi(\lambda_i))^2 = 0$$

כלומר $\phi(\lambda_i) = 0$ $\forall i$, $\forall \phi \in Hom(k,\mathbb{Q})$, ולכן $\lambda_i = 0$ לכל i ו- $s = 0$ $\blacksquare$

הוכחת קריטריון קרטן

נשים לב שמספיק להוכיח את הטענה עבור שדה סגור אלגברית.
הסיבה לכך היא שהתנאים ניתנים לניסוח בעזרת מערכת משוואות לינאריות ולמערכת לינארית קיים פתרון ב- $\bar{k}$ אמ"מ קיים פתרון ב- k.

$(1) \Leftarrow (2)$ לפי Lie Gen יש דגל $(V_i) \subset V$ המיוצב ע"י $\mathfrak{g}$ ולכן

$$Tr_V(xy) = \sum Tr_{V_i/V_{i+1}}(xy) = 0$$

$$0 = V_n \subset V_{n-1} \subset \cdots \subset V_{i+1} \subset V_i \subset \cdots \subset V_n$$
$$\circlearrowleft \mathfrak{g} \quad \circlearrowleft \mathfrak{g} \quad D\mathfrak{g}$$

כלומר $D\mathfrak{g}$ פועל טריוויאלית על V_i/V_{i+1}.

$(1) \Rightarrow (2)$ נניח $u \in Dg$ לפי משפט Engel מספיק להראות ש- u נילפוטנטי.

יהי $u = s+n$ הפירוק הקנוני. נוכיח ש- $Tr(u\phi(s)) = 0$ לכל $\phi \in Hom_{\mathbb{Q}}(k,k)$.

(הערה: לא מובטח לנו ש- $\phi(s) \in g$, אחרת היינו מסיימים).

נכתוב $u = \sum_j \alpha_j [x_j, y_j]$ עם $\alpha_j \in k$, $x_j, y_j \in g$. כיוון ש- $Tr([a,b]c) = Tr(b[c,a])$

נקבל

$$Tr(u \cdot \phi(s)) = \sum_j \alpha_j Tr([x_j, y_j]\phi(s)) = \sum_j \alpha_j Tr(y_j [\phi(s), x_j])$$

מספיק, אם כן, להראות ש- $[\phi(s), x] \in Dg$ ל- $x \in g$.

$$\underset{u_{1,1}(x)}{\underset{\shortparallel}{ad_u(x)}} = [u, x] \in Dg, \quad x \in g \qquad \underset{A}{\underset{\shortparallel}{Dg}} \subset \underset{B}{\underset{\shortparallel}{g}} \subset \underset{V_{1,1}}{\underset{\shortparallel}{End(V)}}$$

ציבוי

ולכן $u_{1,1} g \subset Dg \Rightarrow \phi(s)_{1,1}(g) \subset Dg$ כנדרש $\square$

אלגבראות לי פשוטות למחצה

הרדיקל

למה: אם $\mathfrak{g} \triangleright \mathfrak{a}$ אידיאל כך ש- $\mathfrak{a}$ פתירה ו- $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ פתירה אז $\mathfrak{g}$ פתירה.

הוכחה: כיוון ש- $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ פתירה, קיים n כך ש- $D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})=(0)$, כלומר $D^n(\mathfrak{g})\subset\mathfrak{a}$

כיוון שגם $\mathfrak{a}$ פתירה יש m כך ש- $D^{n+m}(\mathfrak{g})\subset D^m(\mathfrak{a})=(0)$ □

מהלמה נובע שאם $\mathfrak{a}$ ו- $\mathfrak{b}$ אידיאלים פתירים ב- $\mathfrak{g}$ אז גם $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$

כי יש איזומורפיזם $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b} \cong \mathfrak{a}+\mathfrak{b}/\mathfrak{b}$.

מסקנה: בכל אלגברת לי $\mathfrak{g}$ קיים אידיאל פתיר מקסימלי שנסמנו $\mathfrak{r}=rad(\mathfrak{g})\triangleleft\mathfrak{g}$

(זהו הרדיקל של $\mathfrak{g}$).

הגדרה: אלגברת לי $\mathfrak{g}$ נקראת <u>פשוטה למחצה</u> (semisimple) אם $rad(\mathfrak{g})=(0)$.

אלגברת לי $\mathfrak{g}$ נקראת <u>פשוטה</u> אם היא אינה אבלית ואינה מכילה אידיאלים לא טריוויאליים.

הערה: בהמשך נראה שאלגברת לי היא סכום ישר של אלגבראות פשוטות באופן יחיד.

משפט (Levi): תהא $\mathfrak{g}$ אלגברת לי ממימד סופי מעל שדה F ממציין אפס ו- $\mathfrak{r}=rad(\mathfrak{g})$. אז

(1) $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ פשוטה למחצה.

(2) יש ב- $\mathfrak{g}$ <u>תת אלגברה</u> $\mathfrak{s}$ כך ש- $\mathfrak{g}=\mathfrak{r}\oplus\mathfrak{s}$.

($\mathfrak{s}$ כזו מקיימת שתמונת ההטלה $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}\cong\mathfrak{s}$)

בניסוח אחר $\mathfrak{g}$ היא מכפלה חצי ישרה של אלגברה פתירה ואלגברה פשוטה למחצה

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{r} \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r, "\pi"] & \mathfrak{g}/\mathfrak{r} \arrow[r] \arrow[l, bend left, dashed, "\varepsilon"] & 0 \end{tikzcd}$$

כלומר, קיים חתך ε ל- π ומסמנים $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \rtimes \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$.

תבנית killing

יהי F שדה ממאפיין 0 ו- $\mathfrak{g}$ אלגברת לי מעל F.

תבנית בילינארית $(\cdot,\cdot): \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to F$ נקראת אינווריאנטית אם

$$\forall X,Y,Z \in \mathfrak{g}, \qquad (ad_X(Y), Z) + (Y, ad_X(Z)) = 0$$

נשים לב שאם $\mathfrak{a} \triangleleft \mathfrak{g}$ אידיאל אז גם $\mathfrak{a}^\perp$ אידיאל, כאשר

$$\mathfrak{a}^\perp := \{ X \in \mathfrak{g} \mid (X,Y) = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{a} \}$$

ואכן: אם $X \in \mathfrak{a}^\perp$ ו- $Z \in \mathfrak{g}$ אז $[Z,X] \in \mathfrak{a}^\perp$ כי

$$([Z,X],Y) = -(\underbrace{X}_{\mathfrak{a}^\perp}, \underbrace{[Z,Y]}_{\mathfrak{a}}) = 0$$

בהינתן הצגה $\rho: \mathfrak{g} \to End(V)$ של $\mathfrak{g}$ אפשר להגדיר תבנית אינווריאנטית סימטרית

$$(X,Y)_\rho := Tr(\rho(X)\cdot\rho(Y))$$

בפרט:

$$([X,Y],Z)_\rho + (Y,[X,Z])_\rho = Tr\big((\rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X))\rho(Z) + \rho(Y)(\rho(X)\rho(Z) - \rho(Z)\rho(X))\big)$$

$$= Tr\big(\rho(X)\rho(Y)\rho(Z) - \rho(Y)\rho(Z)\rho(X)\big) = 0$$

בפרט, אם $V=\mathfrak{g}$ ו- $\rho = ad$ התבנית המתקבלת נקראת תבנית killing:

$$B(X,Y) = B_{\mathfrak{g}}(X,Y) = Tr(ad_X \cdot ad_Y) \quad \forall X,Y \in \mathfrak{g}$$

משפט: $\mathfrak{g}$ פשוטה למחצה $\iff$ $B_{\mathfrak{g}}$ אינה מנוונת.

הוכחה: נסמן $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}^\perp$.

($\Leftarrow$) נניח $\mathfrak{g}$ פשוטה למחצה. אז $\forall X\in\mathfrak{u}, Y\in\mathfrak{g}$ $B(X,Y)=0$.

בפרט, אם נצמצם את התבנית ל- $\mathfrak{u}$ נקבל $\forall X\in\mathfrak{u},\ Y\in[\mathfrak{u},\mathfrak{u}]\subset\mathfrak{g}$ $B(X,Y)=0$.

לכן, $ad_{\mathfrak{u}} \subset End(\mathfrak{g})$ היא אלגברה פתירה לפי קריטריון קרטן, ואולם

$$\mathfrak{u}/center(\mathfrak{u}) \simeq ad_{\mathfrak{u}}$$

ולכן $\mathfrak{u}$ אידיאל פתיר $\Leftarrow$ $\mathfrak{u}=(0)$ כי הנחנו ש- $\mathfrak{g}$ פשוטה למחצה.

($\Rightarrow$) נניח ש- $\mathfrak{g}$ אינה פשוטה למחצה ולכן קיים ב- $\mathfrak{g}$ אידיאל אבלי $(0)\neq\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}$.

נראה ש- $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}^\perp$. עבור $X\in\mathfrak{a}$, $Y\in\mathfrak{g}$ נשים לב שההעתקה

$$\sigma(\cdot) = ad_X(ad_Y(\cdot)) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

מקיימת $\sigma(\mathfrak{g})\subseteq(\mathfrak{a})$ ו- $\sigma(\mathfrak{a})=(0)$ ולכן $\sigma^2=0$. בפרט $tr(\sigma)=0$ □

תרגיל: הראו ש- $sl_2(\mathbb{C})$ פשוטה למחצה בשתי דרכים: (1) לפי ההגדרה (2) תבנית killing.

(נוח לעבוד עם הבסיס $F=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $H=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ של sl_2)

(3) הראו ש- $sl_2(\mathbb{C})$ פשוטה.

טענה: תהא $\mathfrak{g}$ פשוטה למחצה ו- $\mathfrak{a} \triangleleft \mathfrak{g}$ אידיאל אז $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{a}^\perp$.

הוכחה: ראינו ש- $\mathfrak{a}^\perp$ אידיאל ולכן גם $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^\perp$ אידיאל. נראה שהוא פתיר ולכן טריוויאלי. ואכן מפשטות למחצה נובע ש- $ad:\mathfrak{g}\to End(\mathfrak{g})$ נאמנה ולכן נפעיל את קריטריון קרטן $Tr(ad_X\circ ad_Y)=B(X,Y)=0$, $\forall X,Y\in\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^\perp$.

כיוון ש- $\mathfrak{g}$ פשוטה למחצה $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^\perp=(0)$ ולכן $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{a}^\perp$. $\square$

מהטענה נובע שכל אידיאל ב- $\mathfrak{a}$ הוא גם אידיאל ב- $\mathfrak{g}$ ולכן $\mathfrak{a}$ פשוטה למחצה וכן $\mathfrak{a}^\perp$. באינדוקציה על $dim(\mathfrak{g})$ נקבל

מסקנה: (•) $\mathfrak{g}$ פשוטה למחצה $\iff$ $\mathfrak{g}$ סכום ישר של אלגבראות לי פשוטות.

(••) כל אידיאל, מנה או מכפלה של אלגבראות לי פשוטות למחצה היא פשוטה למחצה.

למעשה הפירוק לאלגבראות פשוטות למחצה יחיד: תהא $\mathfrak{g}$ פשוטה למחצה ו- $(\mathfrak{a}_i)$ אוסף האידיאלים המינימליים הלא טריוויאליים. אז $\mathfrak{a}_i$ אלגבראות לי פשוטות ו- $\mathfrak{g}=\oplus\mathfrak{a}_i$.

אם $\mathfrak{s}$ אלגברת לי פשוטה אז $\mathfrak{s}=[\mathfrak{s},\mathfrak{s}]$ ולכן

מסקנה: אם $\mathfrak{g}$ פשוטה למחצה אז $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.