תורת ההצגות

תהא G חבורה ויהי V מרחב וקטורי מעל שדה F.

הצגה של G על V היא הומומורפיזם $\rho: G \to Aut_F(V)$, כלומר,
לכל $g \in G$ מתאים אופרטור לינארי הפיך $\rho(g): V \to V$ המקיים

$$\underbrace{\rho(g\cdot h)}_{\text{כפל ב-}G} = \underbrace{\rho(g)\circ\rho(h)}_{\text{הרכבת אופרטורים}}$$

הצגות של חבורות מופיעות בתחומים רבים במתמטיקה. הרעיון הבסיסי הוא שכדי להבין חבורה אנחנו נעזרים בפעולתה על קבוצות, ומבין הקבוצות האפשריות, מרחבים וקטוריים מתבררים כעצמים יעילים ביותר.

בקורס נעסוק בחבורות שונות: סופיות, קומפקטיות, קומפקטיות מקומית, וחבורות לי.
(כאשר לחבורה יש גם מבנה טופולוגי נדבר על הצגות רציפות).

§1 חבורות סופיות

G חבורה סופית

V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$, (נניח $V \cong \mathbb{C}^n$).

במקרה כזה, ע"י בחירת בסיס של V, מקבלים זיהוי $Aut_{\mathbb{C}}(V) \cong GL_n(\mathbb{C})$

ולכן הצגה היא פשוט הומומורפיזם $\rho: G \to GL_n(\mathbb{C})$.

דוגמאות

(1) $G = S_3$ (החבורה הסימטרית של 3 אותיות) $S_3 = \{e, a, a^2, b, ba, ba^2\}$

כאשר $b^2 = a^3 = e$ ו- $ab = ba^2$.

נגדיר: $\rho: S_3 \to GL_3(\mathbb{C})$ ע"י

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל: לבדוק שזו אכן הצגה.

(2) תהא X קבוצה סופית ונניח ש- G פועלת על X. כלומר, יש העתקה

$$G\times X \longrightarrow X$$
$$(g,x)\longmapsto g\cdot x$$

המקיימת $(g\cdot h)\cdot x = g\cdot(h\cdot x)$, $1\cdot x = x$.

או בניסוח אחר יש הומומורפיזם $G\to Sym(X)$.

נסמן $V=\mathbb{C}(X)=\{f:X\to\mathbb{C}\}$, מכאן $V\simeq \mathbb{C}^{|X|}$.

אז ההעתקה

$$\rho: G \longrightarrow Aut_{\mathbb{C}}(V)$$
$$g\longmapsto \rho(g)\ ,\ \rho(g)f(x)=f(g^{-1}\cdot x)$$

מגדירה הצגה של G. ההוכחה היא תרגיל, לא קשה, אבל חשוב ביותר!

(שימו לב שדוגמא (1) היא מקרה פרטי של דוגמא 2, כאשר $G=S_3$ ו- $X=\{e_1,e_2,e_3\}$ e_1,e_2,e_3 הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{C}^3$.

<u>העתקה (מורפיזם) של הצגות</u>

תהיינה (ρ,G,V) ו- (ρ',G,V') שתי הצגות של חבורה G .
מורפיזם של הצגות ביניהן הוא העתקה לינארית $T:V\to V'$
המקיימת

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & V' \\ {\scriptstyle \rho(g)}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \rho'(g)} \\ V & \xrightarrow{T} & V' \end{array} \qquad \forall g\in G$$

אם T גם איזומורפיזם של מרחבים (וקטוריים) אז אומרים שההצגות <u>איזומורפיות</u> או <u>שקולות</u> .

<u>תת הצגה</u> אם $W\subset V$ תת מרחב ו- (ρ,G,V) הצגה כך שמתקיים $\rho(g)W\subseteq W$ לכל $g\in G$ אומרים ש- (ρ,G,W) היא תת הצגה.

אם ל- V אין תת הצגה $0\subsetneq W\subsetneq V$ נאמר ש- V הצגה <u>אי-פריקה</u>.

הערה: לעיתים נאמר (ברישול) ש- V הוא הצגה של G במקום לרשום (V,G,ρ).

בניסוח מטריציוני, קיום של תת-הצגה פירושו שקיים בסיס של V (המורכב מבסיס של תת-הצגה W המורחב לבסיס של V) כך ש

$$\forall g\in G \qquad \rho(g) \in \left.\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}\begin{matrix} \}\, W \\ \end{matrix}\right\} V$$

כלומר, W הינו מרחב $\rho(g)$-אינווריאנטי לכל $g\in G$.
אם ניתן למצוא ל- W משלים ב- V שגם הוא תת-הצגה W' נאמר ש- V הוא סכום ישר של ההצגות W, W' : $V = W\oplus W'$.

משפט: כל הצגה היא סכום ישר של הצגות אי פריקות.

הוכחה: מספיק להראות שלכל תת-הצגה יש משלים (המשפט ינבע באינדוקציה על המימד). נניח אם כן ש- V הצגה של G. תהא $(\cdot,\cdot)$ מכפלה פנימית על V. לכל $v,w\in V$ נגדיר

$$\langle v,w\rangle = \sum_{g\in G} (\rho(g)v, \rho(g)w)$$

קל לראות ש- $\langle\,,\rangle$ גם היא מכפלה פנימית.
בנוסף, $\langle\,,\rangle$ היא G-אינווריאנטית, כלומר, $\langle v,w\rangle = \langle \rho(g)v, \rho(g)w\rangle$ לכל $g\in G$. אכן,

$$\langle \rho(h)v, \rho(h)w\rangle = \sum_{g\in G} (\rho(g)\rho(h)v, \rho(g)\rho(h)w) \qquad \forall h\in G$$

$$= \sum_{g\in G} (\rho(gh)v, \rho(gh)w) = \langle v,w\rangle$$

כל שנותר הוא לשים לב ש- $W^\perp$ הוא תת-הצגה (וכמובן שמתקיים $V=W\oplus W^\perp$)
ואכן:

$$\langle \rho(g)w, w'\rangle = \langle w, \rho(g)^* w'\rangle = \langle w, \underbrace{\rho(g)^{-1} w'}_{\in W}\rangle = 0$$

$$\begin{matrix}\forall w\in W^\perp \\ \forall w'\in W\end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \forall w\in W^\perp,\ \rho(g)w\in W^\perp$$

$\square$

לכן כל הצגה V של G איזומורפית לסכום ישר של הצגות אי-פריקות

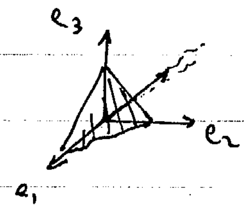
$$V \cong V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k}$$

כאשר a_i הוא מספר הפעמים שמופיעה ההצגה V_i (אי פריקה) בפירוק.

<u>דוגמא</u>: נחזור להצגה הסטנדרטית של S_3 שכבר ראינו: $\rho: S_3 \to GL_3(\mathbb{C})$

ניזכר כי תת-המרחב $W = \mathbb{C}(e_1+e_2+e_3)$ הוא אינווריאנטי.

<u>תרגיל</u>: ① מצאו את המשלים שלו, $W^\perp$.



② מצאו בסיס של V כך ש:

$$\rho(g) \in \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

חשבו את ההצגה ביחס לבסיס זה.

③ הראו שההצגה $W^\perp$ אי פריקה.

אנחנו מכירים עד עכשיו שתי הצגות אי פריקות (שונות) של S_3:

- ההצגה הטריויאלית (W)
- ההצגה $W^\perp$

הנה עוד הצגה: $\varepsilon: G \to GL_1(\mathbb{C})$ $\varepsilon(g) = sgn(g)$.

מסתבר שאלו הן <u>כל</u> ההצגות של S_3 עד כדי שקילות. מתקיים:

$$|S_3| = 6 = 1^2 + 1^2 + 2^2 =$$ סכום ריבועי המימדים של ההצגות האי פריקות

<u>משפט</u>: תהא G חבורה סופית, אז ל-G יש מספר סופי של הצגות אי-פריקות מרוכבות. יתר על כן, אם $V_1, \dots, V_k$ הן ההצגות האי פריקות אז

$$|G| = \sum_{i=1}^{k} (\dim V_i)^2 .$$

הלמה של Schur

תהיינה V ו- W הצגות אי פריקות של G ותהא $\varphi: V \to W$ העתקה של G-הצגות. אז

(1) φ איזומורפיזם או $\varphi = 0$.

(2) אם $V = W$ אז $\varphi = \lambda \cdot I$, $\lambda \in \mathbb{C}$, I אופרטור הזהות.

<u>הוכחה</u> (1) קל לראות ש- $\ker\varphi$ ו- $\operatorname{Im}\varphi$ הם תתי-הצגות של V ו- W בהתאמה. לכן, או ש- $V = \ker\varphi$ ואז $\varphi = 0$, או ש- $\ker\varphi = (0)$ ו- $\operatorname{Im}\varphi = W$, ולכן φ איזומורפיזם.

(2) כיוון ש- $\mathbb{C}$ סגור אלגברית, ל- φ יש בהכרח ערך עצמי $\lambda \in \mathbb{C}$. לכן להעתקה $\varphi - \lambda I$ יש גרעין לא טריוויאלי. ולכן $\varphi - \lambda I = 0$ מ-(1) □

<u>מסקנה:</u> לכל הצגה V של חבורה סופית G יש פירוק $V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k}$ כאשר V_i הן הצגות אי פריקות שונות. הפירוק הוא יחיד (עד כדי סדר).

<u>הוכחה:</u> (שים לב שאם $W = \oplus W_j^{b_j}$ הצגה אחרת של G ו- $\varphi: V \to W$ העתקה של G-הצגות אז φ בהכרח מעתיקה את המרכיב $V_i^{a_i}$ של V לתוך מרכיב $W_j^{b_j}$ כך ש- $V_i \cong W_j$. בפרט זה נכון עבור $I: V \to V$ (ביחס לשני פירוקים שונים אפשריים) □