הרצאה 10

חבורות טופולוגיות

הגדרה: חבורה טופולוגית היא חבורה G שהיא גם מרחב טופולוגי כך שפעולות הכפל וההופכי הן רציפות

$$m: G\times G \to G \qquad (x,y)\longmapsto xy$$
$$i: G \to G^{-1} \qquad x \longmapsto x^{-1}$$

דוגמאות

$(\mathbb{R}^n,+)$, $\mathbb{T}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $(\mathbb{R}^\times,\cdot)$, $(\mathbb{C}^\times,\cdot)$, $GL_n(\mathbb{R})$, $O(n)$, $U(n)$, $(\mathbb{Q}_p,+)$, $GL_n(\mathbb{Q}_p)$,
חבורות סופיות (עם הטופולוגיה הדיסקרטית).

טענה: תהי G חבורה טופולוגית. אז

(1) הטופולוגיה של G אינווריאנטית תחת הזזות ואינוורסיות: אם הקבוצה $U\subseteq G$ פתוחה אז גם Ug, gU, U^{-1} פתוחות לכל $g\in G$. יתר על כן AU ו- UA פתוחות לכל $A\subseteq G$

(2) לכל סביבה U של 1 קיימת סביבה סימטרית V של 1 (כלומר, $V=V^{-1}$) כך שמתקיים $V\cdot V\subseteq U$.

(3) אם H ת"ח של G, אז גם $\overline{H}$ ת"ח של G.

(4) כל תת-חבורה פתוחה היא גם סגורה.

(5) אם $A,B\subseteq G$ קומפקטיות אז גם $A\cdot B$.

הוכחה. (1) החלק הראשון נובע מרציפות הכפל וההופכי. החלק השני נובע מכך ש- $AU=\bigcup_{g\in A} gU$.

(2) מרציפות של $(x,y)\mapsto x\cdot y$ ב- 1 נובע שקיימות סביבות W_1,W_2 של 1 כך שמתקיים $W_1\cdot W_2\subseteq U$. נבחר $V=W_1\cap W_2\cap W_1^{-1}\cap W_2^{-1}$.

(3) אם $x,y\in\overline{H}$ אז יש רשתות $\{x_\alpha\}$ ו- $\{x_\beta\}$ ב- H המתכנסות ל- x ול- y. במקרה כזה $x_\alpha y_\beta\to xy$ ו- $x_\alpha\to x^{-1}$ ולכן xy ו- x^{-1} הם ב- $\overline{H}$.

(4) אם H ת"ח פתוחה אז המשלים שלה הוא איחוד של קוסטים שכולם פתוחים לפי (1) ולכן פתוח.

(5) $A\cdot B$ היא התמונה של הקבוצה הקומפקטית $A\times B$ תחת העתקת הכפל שהיא רציפה, ולכן $A\cdot B$ קומפקטית. $\square$

נניח ש- G חבורה טופולוגית ו- H תת-חבורה.
תהי $q: G \to G/H$ העתקת המנה של מרחב המחלקות.
נעניק ל- G/H את טופולוגית המנה.
באופן מפורש: אם $U \subseteq G/H$ (נאמר שהיא פתוחה) אם $q^{-1}(U)$ פתוחה ב- G.
נשים לב ש- q היא העתקה פתוחה כי אם $V \subseteq G$ פתוחה אז $q^{-1}(qV) = VH$
ולכן פתוחה מהטענה הקודמת.

טענה: תהי $H < G$ תת חבורה של חבורה טופולוגית G. אז
(1) אם H סגורה אז G/H האוסדורף.
(2) אם G קומפקטית מקומית אז גם G/H.
(3) אם H נורמלית אז G/H חבורה טופולוגית.

הוכחה: (1) נניח ש- $\bar{x} = q(x)$ ו- $\bar{y} = q(y)$ נקודות שונות ב- G/H.
אם H סגורה, אז xHy^{-1} היא תת-קבוצה סגורה שאינה מכילה את 1.
לפי הטענה הקודמת יש סביבה סימטרית U של 1 כך ש- $UU \cap xHy^{-1} = \phi$.
כיוון ש- $U = U^{-1}$ ו- $H = HH$ מתקיים:

$$1 \notin UxH(Uy)^{-1} = (UxH)(UyH)^{-1}$$

ולכן $UxH \cap UyH = \phi$. לכן $q(Ux), q(Uy)$ הן סביבות זרות של $\bar{x}, \bar{y}$.

(2) אם $U \subseteq G$ סביבה קומפקטית של $1 \in G$ אז $q(Ux) \subseteq G/H$ סביבה קומפקטית של $q(x)$ ב- G/H.

(3) יהיו $x, y \in G$ ו- U סביבה של $q(xy)$ ב- G/H. ישלמצוא סביבות של $q(x)$ ו- $q(y)$ כך שמכפלתן מוכלת ב- U. מרציפות הכפל ב- G נקבל שקיימות סביבות V ו- W של x ו- y כך ש- $VW \subseteq q^{-1}(U)$ אז $q(V)$ ו- $q(W)$ הן הסביבות המבוקשות.

מסקנה: (•) אם G מקיים T_1 אז G הנו האוסדורף.
(••) אם G אינו T_1, אז $\overline{\{1\}}$ היא תת-חבורה נורמלית סגורה ולכן
$G/\overline{\{1\}}$ היא חבורה טופולוגית האוסדורפית.

הוכחה: (•) נובע מתוך (1) של הטענה עם $H=\{1\}$.
(••) $\overline{\{1\}}$ ת"ח מהטענה הקודמת. זו תת-החבורה הסגורה הקטנה ביותר של G
ולכן היא נורמלית (כי אחרת חיתוך תמונה זו עם הצמדה שלה נותן ת"ח
קטנה יותר). מהטענה נובע ש- $G/\overline{\{1\}}$ חבורה טופולוגית האוסדורפית ((1)+(2)).

טענה: אם G חבורה טופולוגית קומפקטית מקומית, אז ל- G יש ת"ח H
שהיא פתוחה, סגורה ו- σ-קומפקטית.

הוכחה: תהי U סביבה קומפקטית סימטרית של 1, ונסמן

$$U_n := \underbrace{U\cdot U\cdots U}_{n \text{ פעמים}}$$

תהי $H=\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. אז H היא תת-חבורה (= החבורה הנוצרת ע"י U)
היא פתוחה כי U_n פתוחות ולכן היא סגורה מהטענה הקודמת.
יתר על כן, U_n קומפקטיות, ולכן H σ-קומפקטית. $\square$

דוגמאות

1. חבורות לי: $\mathbb{R}^n$, $GL_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{T}^n$, $O(n)$, ...
2. חבורות p-אדיות.

• $\mathbb{Q}_p$: נגדיר על $\mathbb{Q}$ נורמה $|\,|_p:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}^+$ עבור p ראשוני כך:
כך שנרשום $r=p^m\cdot q$ כאשר r רציונלי, כך ש- q לא מכיל גורמי p.
(נגדיר)

$|r|_p = p^{-m}$, $|0|_p=0$ $\quad \mathbb{Q}\ni r\neq 0$

יש לנורמה מאפיינים

$|r_1+r_2|_p \le \max\{|r_1|_p,|r_2|_p\}$ (תנאי ה-אולטרה מטריקה)
$|r_1\cdot r_2|_p = |r_1|_p\cdot|r_2|_p$ (כפלי)

בנורמה משרה מטריקה על $\mathbb{Q}$: $d_p(x,y)=|x-y|_p$.

$\mathbb{Q}_p$ מוגדר כהשלמה של $\mathbb{Q}$ ביחס למטריקה זו.

<u>תרגיל:</u> אם $m\in\mathbb{Z}$, $c_j\in\{0,1,\dots,p-1\}$ עבור $j\ge m$, אז ~~המספר~~ הטור $\sum_{j=m}^{\infty} c_j p^j$ מתכנס ב-$\mathbb{Q}_p$. יתר על כן, כל מספר p-אדי הוא כזה.

(סמן $\overline{B(r,x)}=\{y\in\mathbb{Q}_p \mid |x-y|_p\le r\}$ (הכדור הסגור ברדיוס r סביב x).
כיון שערכי הנורמה (= המטריקה) הם $p^{\mathbb{Z}}$ נקבל שעבור ε מספיק קטן הכדור הפתוח ברדיוס $r+\varepsilon$ סביב x : $B(r+\varepsilon,x)=\{y \mid |x-y|_p<r+\varepsilon\}$ שווה לכדור הסגור ברדיוס r
ולכן הכדורים הם גם פתוחים וגם סגורים.

$\mathbb{Z}_p=\overline{B}(1,0)$ השלמים ה-p-אדיים

$p\mathbb{Z}_p=B(1,0)$ האידיאל המקסימלי.

<u>תרגיל:</u> להראות ש- $B(x,r)$ קומפקטי. ולכן $\mathbb{Q}_p$ קומפקטי-מקומית.

באופן דומה, $\mathbb{Q}_p^n$, $GL_n(\mathbb{Q}_p)$, ... חבורות טופולוגיות קומפקטיות מקומית.

3 תהא G חבורה כלשהי ונסמן $S=\{N\lhd G \mid [G:N]<\infty\}$

$\varprojlim_{S} G/N =$ הגבול ההפוך של המנות G/N ביחס לקבוצה S

הוא חבורה טופולוגית שלמה. (נדון בדוגמא זו ביתר פירוט בהמשך.
למשל:

$$\mathbb{Z}_p\cong\varprojlim \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$$