הרצאה 1

חבורות קומפקטיות מקומית

יהי X מרחב (האוסדורף) קומפקטי מקומית.

נסמן ב-$\mathcal{B}$ את ה-σ-אלגברה הנוצרת ע"י הקבוצות הפתוחות ב-X: זו המשפחה הקטנה ביותר של תתי קבוצות של X המכילה את כל הקבוצות הפתוחות ובנוסף סגורה תחת לקיחת משלים ואיחודים בני מניה (מכאן היא גם סגורה תחת חיתוכים בני מניה). איברי $\mathcal{B}$ נקראים קבוצות בורל של G.

מידת בורל על X היא פונקציה $\mu : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ המקיימת

(1) $\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$, $E = \bigsqcup E_i$, $E_i \in \mathcal{B}$

(2) $\mu(K) < \infty$ לכל K קומפקטית.

מידת בורל תיקרא **רגולרית** אם לכל $E \in \mathcal{B}$ מתקיים

$$\mu(E) = \inf_{\substack{E \subset V \\ \text{פתוחה}}} \mu(V) = \sup_{\substack{K \subset E \\ \text{קומפקטית}}} \mu(K)$$

סימונים: $C(X)$ = אוסף הפונקציות הרציפות על X עם ערכים ב-$\mathbb{R}$

$C_c(X)$ = — " — ... עם תומך קומפקטי.

$C_0(X)$ = — " — ... המתאפסות "באינסוף", כלומר לכל $f \in C_0(X)$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצה קומפקטית $K \subseteq X$ כך ש- $|f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in X \setminus K$

כשנרצה לדבר על פונקציות עם ערכים מרוכבים (נציין זאת במפורש), אז נסמן $\mathbb{C}_0(X), \mathbb{C}_c(X), \mathbb{C}(X)$.

משפט ההצגה של Riesz

לכל פונקציונל לינארי T על $C_c(X)$ המקיים $Tf \geq 0$ אם $f \geq 0$ קיימת מידת בורל רגולרית יחידה μ על X כך שמתקיים

$$Tf = \int_X f \, d\mu$$

תהא G חבורה טופולוגית (האוסדורפית) קומפקטית מקומית.
אם f פונקציה מעל G, נגדיר

הזזה שמאלית $\quad L_g f(x) = f(g^{-1}x)$

הזזה ימנית $\quad R_g f(x) = f(xg)$

לכל $g\in G$. מתקיים $L_{g_1g_2}=L_{g_1}L_{g_2}$ וכן ל-R.

הגדרה: מידת Haar על G היא מידה בורל רגולרית על הבורליים של G (שאינה $\equiv 0$) שהיא אינווריאנטית להזזות, כלומר

$$\forall g\in G,\ \forall E\in \mathcal{B}, \quad \mu(gE)=\mu(E)$$

(זו מידת האר שמאלית, באופן דומה מגדירים מידת האר ימנית ע"י השוויון $\mu(Eg)=\mu(E)$).

נשים לב שאם μ מידת האר ימנית אז $\tilde{\mu}(E):=\mu(E^{-1})$ היא מידת האר ימנית על G (ולמעשה, אם ורק אם).

טענה: תהא μ מידה בורל רגולרית. אז μ מידת האר שמאלית על G אם"ם לכל $g\in G$ ולכל $f\in C_c(G):=\{f\in C_c(G)\mid f\geq 0, f\not\equiv 0\}$ מתקיים

$$(\Delta) \qquad \int_G L_g f\, d\mu = \int f\, d\mu$$

הוכחה: לכל $g\in G$ (נסמן) $\mu_g(E):=\mu(gE)$. אז μ_g היא גם כן מידה בורל רגולרית ומתקיים

$$(*) \qquad \int L_g f\, d\mu = \int f\, d\mu_g \qquad \forall f\in C_c(G)$$

הסבר – מספיק לראות ש-$(*)$ נכון עבור פונקציות פשוטות, ואכן אם $f=\sum a_i \chi_{E_i}$ אז

$$\int L_g f\, d\mu = \sum a_i \mu(gE_i) = \int f\, d\mu_g$$

ועכשיו, הכיוון $\Leftarrow$ נובע כיוון שאם μ מידת האר אז $\mu=\mu_g \ \forall g$

ובכיוון $\Leftarrow$ נובע, כיוון שאם (Δ) מתקיים לכל $f\in C_c^+(G)$ אז הוא גם מתקיים לכל $f\in C_c(G)$, כלומר נתון לנו שלכל $g\in G$

$$\int f\,d\mu_g=\int f\,d\mu \qquad \forall f\in C_c(G)$$

וממשפט ההצגה של Riesz נובע $\mu=\mu_g$. ∎

המשפט המרכזי שאין אנו מוכיחים הוא

<u>משפט</u>: אם G חבורה קומפקטית מקומית אז קיימת על G מידת האר שמאלית והיא יחידה עד כדי כפל בסקלר $c\in(0,\infty)$.

לפני שנוכיח את המשפט נראה כמה דוגמאות "בינתיים".

<u>דוגמאות</u>

① מידת לבג על $\mathbb{R}$ היא מידת האר על $(\mathbb{R},+)$. מתקיים

$$\forall a\in\mathbb{R} \qquad \int_{\mathbb{R}} f(a+x)\,dx=\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$$

② נביט בחבורה הכפלית $(\mathbb{R}^\times,\cdot)$. נבנה עליה מידת האר אינווריאנטית <u>לכפל</u> באמצעות הלבג. נביט בפונקציונל

$$f\in C_c(\mathbb{R}^\times)\ ,\quad f\longmapsto\int_{\mathbb{R}^\times} f(x)\,\frac{dx}{|x|}$$

כאשר dx מידת האר (הלבגית = לבג) על $\mathbb{R}$. נראה שהפונקציונל זה נותן את אותו ערך ל-f ול-L_af ($L_af(x)=f(a^{-1}x)$).

לפי נוסחת החלפת המשתנה

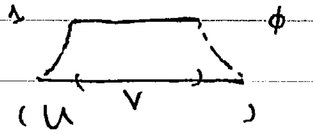
$$\int_{\mathbb{R}^\times} f(ax)\,\frac{dx}{|x|}\underset{\substack{y=ax\\ dy=|a|\,dx}}{=}\int f(y)\,\frac{dy/|a|}{|y|/|a|}=\int_{\mathbb{R}^\times} f(y)\,\frac{dy}{|y|}$$

הוכחת המשפט

קיום

נשתמש בטענה ונבנה פונקציונל על $C_c(G)$ שאינווריאנטי להזזות.

רעיון ההוכחה: תהי $\phi \in C_c^+(G)$ פונקציה חסומה ע"י 1, שווה ל-1 על קבוצה פתוחה 'קטנה' V ונתמכת ע"י קבוצה פתוחה U 'מעט' גדולה יותר.



אם $f \in C_c^+(G)$ היא פונקציה המשתנה 'באיטיות' כך שהיא 'כמעט' קבועה על הזזות שמאליות של U אז אפשר לקרב את f ע"י הזזות של ϕ

$$f \approx \sum_{j=1}^{N} c_j L_{g_j}\phi \qquad g_j \in G$$

אם μ מידת האר על G אז

$$\int f \, d\mu \approx \left(\sum c_j\right) \int \phi \, d\mu$$

והקירוב יהיה טוב יותר ככל שהתומך של ϕ קרוב לנקודה (אם ננרמל את המידה כדי לבטל את $\int \phi \, d\mu$ נקבל את $\int f \, d\mu$ כגבול של הסכומים $\sum c_j$.

כעת במדויק.

בהינתן $f, \phi \in C_c^+(G)$ נגדיר

$$(f : \phi) = \inf \left\{ \sum c_j \;\middle|\; f \leq \sum_j c_j L_{g_j}\phi \;,\; g_j \in G \right\}$$

מתקיימות התכונות הבאות:

$(f:\phi) = (L_g f : \phi) \quad \forall g \in G \quad (1)$

$(f_1 + f_2 : \phi) \leq (f_1 : \phi) + (f_2 : \phi) \quad (2)$

$(cf : \phi) = c(f : \phi) \quad \forall c > 0 \quad (3)$

$(f_1 : \phi) \leq (f_2 : \phi) \quad \forall f_1 \leq f_2 \quad (4)$

$(f : \phi) \geq \|f\|_{sup} / \|\phi\|_{sup} \quad (5)$

$(f : \phi) \leq (f : \psi)(\psi : \phi) \quad \forall \psi \in C_c(G) \quad (6)$

כל התכונות מיידיות מההגדרה של $(f:\phi)$. לגבי תכונה (6), נשים לב שאם $f\le \sum c_i L_{g_i}\psi$ ו- $\psi\le \sum_j b_j L_{h_j}\phi$ אז $f\le \sum_{i,j} c_i b_j L_{g_i h_j}\phi$.

כעת, ננרמל: נקבע $f_0\in C_c^+(G)$ ונגדיר

$$I_\phi(f):=\frac{(f:\phi)}{(f_0:\phi)} \qquad f,\phi\in C_c^+(G)$$

מתכונות (1)-(4) נקבל ש- I_ϕ מתרחב לפונקציונל על $C_c(G)$ שהוא אינווריאנטי משמאל, תת-אדיטיבי, הומוגני ומונוטוני. יתר על כן, מתכונה (6) נקבל

$$(f_0:f)^{-1}\le I_\phi(f)\le (f:f_0)$$

מהגדרה $f:=f_0$, $\psi:=f$. מהגדרה $\psi:=f_0$

מה שחסר לנו בשלב זה הוא להחליף את התת-אדיטיביות באדיטיביות כדי לקבל פונקציונל לינארי.

<u>למה</u>: אם $f_1,f_2\in C_c^+(G)$ ו- $\varepsilon>0$, אז קיימת סביבה V של 1 כך שמתקיים

$$I_\phi(f_1)+I_\phi(f_2)\le I_\phi(f_1+f_2)+\varepsilon$$

כאשר התומך של ϕ מוכל ב- V.

<u>הוכחה</u>: נקבע $\psi\in C_c^+(G)$ כך ש- $\psi=1$ על $supp(f_1+f_2)$ ויהי $\delta>0$. נסמן

$$h=f_1+f_2+\delta\psi$$

$$h_i=f_i/h \qquad (i=1,2)$$

כיוון ש- $h_i\in C_c^+(G)$ היא רציפה במ"ש מימין ומשמאל (תרגיל בית) ולכן, קיימת סביבה V של $1\in G$ כך שמתקיים

$$|h_i(g)-h_i(g')|<\delta \qquad \forall g'g^{-1}\in V$$

נניח ש- $\phi\in C_c^+(G)$ ומקיימת $\mathrm{supp}(\phi)\subseteq V$. אזי $h\le\sum_j c_j L_{g_j}\phi$ ואז

$$f_i(g)=h(g)h_i(g)\le\sum_j c_j\,\phi(g_j^{-1}g)\,h_i(g)\le\sum_j c_j\,\phi(g_j^{-1}g)\,(h_i(g_j)+\delta)$$

$(i=1,2)$

כי $|h_i(g)-h_i(g_j)|<\delta$ עבור $g_j^{-1}g\in\mathrm{supp}(\phi)$.

נקבל:

$$(f_1:\phi)+(f_2:\phi)\le\sum_j c_j(h_1(g_j)+\delta)+\sum_j c_j(h_2(g_j)+\delta)$$

$$\le\sum_j c_j(1+2\delta)\qquad(\text{כי } h_1+h_2\le 1)$$

ניקח אינפימום ונקבל:

$$I_\phi(f_1)+I_\phi(f_2)\le(1+2\delta)\,I_\phi(h)$$

$$\le(1+2\delta)\big(I_\phi(f_1+f_2)+\delta I_\phi(\psi)\big)$$

התוצאה נובעת ע"י בחירת δ קטן מספיק. ∎

נחזור להוכחת המשפט:

לכל $f\in C_c^+(G)$ נסמן $X_f=[(f_0:f)^{-1},(f:f_0)]$ ונסמן $X=\prod_{f\in C_c^+(G)}X_f$
המכפלה הקרטזית של כל הקטעים.

כיוון ש- X מכפלה של מרחבים קומפקטיים (קטעים סגורים) הוא קומפקטי.
את X אפשר לחשוב גם כאוסף הפונקציות $\eta:C_c^+(G)\to(0,\infty)$ המקיימות $\eta(f)\in X_f$
לכל $f\in C_c^+(G)$. לכן לכל $\phi\in C_c^+(G)$ מתקיים $I_\phi\in X$. נגדיר

$$\forall V\ni 1\ \text{סביבה של 1 ב- } G\qquad K(V)=\overline{\{I_\phi\mid\mathrm{supp}(\phi)\subset V\}}$$

הקבוצות (הסגורות) $K(V)$ מקיימות את תכונת החיתוך הסופי כי

$$\bigcap_{j=1}^n K(V_j)\supseteq K\Big(\bigcap_{j=1}^n V_j\Big)$$

מקומפקטיות X, קיים $I\in X$ כך ש- $I\in\bigcap_{V\ni 1} k(V)$

פירושו של דבר שבכל סביבה של I ב- X יש I_ϕ-ים עם $\mathrm{supp}(\phi)$ קטן כרצוננו, כלומר

$$\underset{\text{סביבה}}{\forall V\ni 1},\quad \forall \varepsilon>0,\quad \forall f_1,\dots,f_n\in C_c^+(G),\ \exists \phi\in C_c^+(G):$$

$$(\cdot)\qquad \mathrm{supp}(\phi)\subseteq V$$

$$(\cdot\cdot)\qquad |I(f_j)-I_\phi(f_j)|<\varepsilon \qquad (j=1,\dots,n)$$

מכאן כי התכונות של I_ϕ עוברות ל- I. למשל לכל $f\in C_c^+(G)$ לכל $g\in G$

$$|I(f)-I(L_gf)|\leq |I(f)-I_\phi(f)|+|I_\phi(L_gf)-I(L_gf)|\leq 2\varepsilon \qquad (*)$$

(כאן g קבוע, f קבועה, ולכל בחירה של $\varepsilon>0$ יש I_ϕ מתאים)

כיוון שאי השוויון $(*)$ נכון לכל $\varepsilon>0$, נקבל ש- $I(f)=I(L_gf)$. באופן דומה נובעת האדיטיביות (מתוך האדיטיביות של I_ϕ + הגבול) וההומוגניות לכפל בסקלר.

לכל $f\in C_c(G)$ יש $f_1,f_2\in C_c^+(G)$ כך ש- $f=f_1-f_2$. ונגדיר $I(f)=I(f_1)-I(f_2)$. ההגדרה לא תלויה בבחירת f_1,f_2 כי אם $f=f_1'-f_2'$ אז $f_1+f_2'=f_1'+f_2$ ולכן $I(f_1')+I(f_2)=I(f_1)+I(f_2')$.
ולכן קיבלנו פונקציונל לינארי I של $C_c(G)$ שמוגדר חיובי. פונקציונל זה מתאים למידה הרצויה ממשפט ההצגה של ריס.

יחידות: לא נוכיח כאן. ההוכחה לא מורכבת במיוחד ואפשר למצוא אותה בספר של Folland עמוד 39.

□

טענה: אם λ מידת הער של G אז $\lambda(U)>0$ לכל U פתוחה לא ריקה. בנוסף $\int f\,d\lambda>0$ לכל $f\in C_c^+(G)$.

הוכחה: נניח ש- $U\neq\emptyset$ פתוחה ו- $\lambda(U)=0$. אז $\lambda(gU)=0$ $\forall g\in G$. וכיוון שכל קבוצה קומפקטית ניתן לכסות ע"י מספר סופי של הזזות של U, נקבל $\lambda(K)=0$ לכל קומפקטית ומכאן $\lambda(G)=0$ מרגולריות פנימית. החלק השני מסקנה. □

<u>טענה</u>: אם G חבורת לי המשוכנת כקבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^N$ והפעולה של G על עצמה בהכפלה שמאלית נתונה ע"י העתקות אפיניות

$$x \cdot y = \underbrace{A(x)}_{\in M_N(\mathbb{R})} y + \underbrace{B(x)}_{\in \mathbb{R}^N}$$

$$x, y \in G \subseteq \mathbb{R}^N$$

אז $|\det(A(x))|^{-1} dx$ היא מידת האר שמאלית של G כאשר dx היא מידת לבג של $\mathbb{R}^N$.

<u>הוכחה</u>: תרגיל בתרגול 3. $\square$