# אנליזה הרמונית של חבורות אבליות קומפקטיות מקומיות

תורת ההצגות של חבורות אבליות קומפקטיות מקומיות נקראת גם אנליזה הרמונית או אנליזת פורייה. לפני שנגיע למשפטים, הנה תיאור התמונה הכללית שאנחנו מתארים.

תהא $G$ חבורה אבלית קומפקטית מקומית. נסמן את פעולת החבורה ב- $+$ ואת האפס ב- $0$. נסמן ב- $\mathbb{T}$ את מעגל היחידה ב- $\mathbb{C}$ ($\mathbb{T}$ חבורה אבלית קומפקטית ביחס לכפל). נסמן

$$\hat{G} = \{ \chi : G \to \mathbb{T} \mid \chi \text{ הומומורפיזם רציף} \}$$

ל- $\hat{G}$ יש באופן טבעי מבנה של חבורה ביחס לכפל פונקציות

$$(\chi_1 + \chi_2)(x) = \chi_1(x) \cdot \chi_2(x) \quad , x \in G$$

בהמשך נעניק ל- $\hat{G}$ מבנה של חבורה טופולוגית (שתתברר כקומפקטית מקומית).
אחד המשפטים המרכזיים שנוכיח הוא דואליות פונטריגין (Pontryagin):

$$G \simeq \hat{\hat{G}} \qquad (\text{איזומורפי של חבורות טופולוגיות})$$

משפט זה מזכיר את המשפט על מרחבים וקטוריים $V \simeq V^* \simeq V^{**}$ כאשר $V$ מרחב וקטורי ממימד סופי. במקרה של חבורות לא תמיד $G \simeq \hat{G}$ כפי שנראה בדוגמאות הבאות.

**דוגמאות**

(1) $G = \mathbb{R}$. מהם הקרקטרים האוניטריים של $\mathbb{R}$ ($= \hat{\mathbb{R}}$)?

נניח ש- $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ העתקה רציפה והומומורפיזם. בהכרח, קיים $a \in \mathbb{T}$ כך ש- $\chi(x) = a^x$, כי $\chi(0) = 1$ ואם נסמן $\chi(1) = a$ אז $\chi(n) = a^n$ לכל $n \in \mathbb{Z}$ ולכן $\chi(\frac{1}{m}) = a^{1/m}$ ולכן $\chi(\frac{n}{m}) = a^{n/m}$ לכל רציונלי.

ומרוכבות $\chi(x)=a^x$ לכל $x\in\mathbb{R}$. כיוון שתמונת $\chi$ היא על מעגל היחידה, אפשר לרשום $a=e^{2\pi i\alpha}$ עבור $\alpha\in\mathbb{R}$, ולכן

$$\chi(x)=\chi_\alpha(x)=e^{2\pi i\alpha x}$$

ונשים לב ש- $\chi_\alpha=\chi_\beta \iff \alpha=\beta$, ולכן

$$\mathbb{R}\xrightarrow{\sim}\hat{\mathbb{R}}$$
$$\alpha\longmapsto\chi_\alpha$$

איזומורפיזם של חבורות, ובהמשך נראה שגם הומאומורפיזם.

2 (א) $G=\mathbb{T}$. מהם הקרקטרים של $\mathbb{T}$? אלו בדיוק הקרקטרים של $\mathbb{R}$ שבגרעינם מכיל את $\mathbb{Z}$. וכיוון ש- $\chi_\alpha(\mathbb{Z})=1 \iff \alpha\in\mathbb{Z}$, נקבל

$$\mathbb{Z}\xrightarrow{\sim}\hat{\mathbb{T}}$$
$$n\longmapsto\chi_n(z)=z^n \quad \text{(בכתיב כפלי)}$$

(ב) $G=\mathbb{Z}$. מהם הקרקטרים של $\mathbb{Z}$? הקרקטרים של $\mathbb{R}$ הם צמצום קרקטרים של $\mathbb{Z}$. אלא שייתכן ש- $\chi_\beta|_\mathbb{Z}=\chi_\alpha|_\mathbb{Z}$ למרות ש- $\alpha\neq\beta$. כדי להבחין בין קרקטרים שונים נבחר נציגים:

$$\chi_\alpha|_\mathbb{Z}=\chi_\beta|_\mathbb{Z} \iff \alpha-\beta\in\mathbb{Z} \iff \bar\alpha=\bar\beta\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$$ ולכן:

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z}\xrightarrow{\sim}\hat{\mathbb{Z}}$$
$$t\longmapsto\chi_t(x)=e^{2\pi i t x},\quad x\in\mathbb{Z}$$

נסכם: $\mathbb{R}=\hat{\mathbb{R}}$, $\mathbb{Z}=\hat{\mathbb{T}}$, $\mathbb{T}=\hat{\mathbb{Z}}$ בכל המקרים הנ"ל $G\simeq\hat{\hat{G}}$.

3 באופן דומה מראים: $\mathbb{Q}_p\simeq\hat{\mathbb{Q}}_p$, $\hat{\mathbb{Z}}_p\simeq\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, $\widehat{\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}=\mathbb{Z}_p$.

נגדיר בהמשך אופרציה על פונקציות, שבדוגמאות נותנת:

$$G=\mathbb{R} \qquad \hat{f}(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-ixy}\,dx$$

$$G=\mathbb{T} \qquad \hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\,d\theta$$

$$G=\mathbb{Z} \qquad \hat{f}(e^{i\alpha})=\sum_{-\infty}^{\infty} f(n)\,e^{in\alpha}$$

שהיא העתקה של פונקציה $f$ על מרחב ההצגות האי-פריקות כך שאפשר להציג את $f$ כ"צירוף" של הצגות.

## מהחבורה $G$ לאלגברת בנך $L^1(G)$

עבור חבורה סופית $G$ הגדרנו את חוג החבורה $\mathbb{C}[G]$ וראינו שקילות בין הצגות של $G$ ומודולים מעל $\mathbb{C}[G]$. במקרה של חבורה קומפקטית מקומית המעבר מהחבורה ל-"חוג החבורה" ($=L^1(G)$) הנו קריטי.

אם $f$ ו-$g$ פונקציות מדידות על $G$, נגדיר את הקונבולוציה:

$$(f*g)(x)=\int_G f(x-y)\,g(y)\,dy$$

בהנחה ש-

$$(*) \qquad \int |f(x-y)\,g(y)|\,dy<\infty$$

<u>משפט:</u>

(1) אם התנאי (*) מתקיים עבור איזשהו $x\in G$ אז $(f*g)(x)=(g*f)(x)$.

(2) אם $f\in L^1(G)$ ו-$g\in L^\infty(G)$ אז $f*g$ חסומה ורציפה במ"ש.

(3) אם $f,g\in C_c(G)$ עם תומכים קומפקטיים $A$ ו-$B$, אז התומך של $f*g$ מוכל ב-$A+B$, ובפרט $f*g\in C_c(G)$.

(4) אם $1<p<\infty$ ו-$1/p+1/q=1$, אז לכל $f\in L^p(G)$, $g\in L^q(G)$ מתקיים $f*g\in C_0(G)$.

(5) אם $f,g\in L^1(G)$ אז התנאי (*) מתקיים כמעט לכל $x\in G$, $f*g\in L^1(G)$ ומתקיים אי-השוויון $\|f*g\|_1\le\|f\|_1\|g\|_1$.

(6) אם $f,g,h\in L^1(G)$ אז $(f*g)*h=f*(g*h)$.

<u>הוכחה</u>

(1)
$$(f*g)(x)=\int_G f(x-y)g(y)\,dy$$
$$\underset{y\leftrightarrow y+x}{=}\int f(-y)g(x+y)\,dy\underset{y\leftrightarrow -y}{=}\int f(y)g(x-y)\,dy=(g*f)(x)$$

(2) חסימות:
$$|(f*g)(x)|=\left|\int_G f(x-y)g(y)\,dy\right|$$
$$\le\int_G|f(x-y)g(y)|\,dy\le\|g\|_\infty\int_G|f(x-y)|\,dy=\|g\|_\infty\|f\|_1$$

רציפות במ"ש:
$$\forall x,z\in G\quad |(f*g)(x)-(f*g)(z)|\le\int_G|f(x-y)-f(z-y)|\,|g(y)|\,dy$$
$$(f_a(y)=f(y-a))\qquad\le\|f_{-x}-f_{-z}\|_1\|g\|_\infty$$
$$=\|f-f_{x-z}\|_1\|g\|_\infty$$

והטענה נובעת מכך ש- $x \mapsto f_x$ רציפה במ"ש כהעתקה $G \to L^1(G)$.

(3) אם $f$ מתאפסת מחוץ ל- $A$ ו- $g$ מתאפסת מחוץ ל- $B$ אז $f(x-y)g(y)$ מתאפסת, אלא אם כן $y \in B$ וגם $x-y \in A$ כלומר $x \in A+B$.

(4) נבחר סדרות $\{f_n\},\{g_n\} \subseteq C_c(G)$ כך ש- $\|f_n - f\|_p \to 0$ וכן $\|g_n - g\|_q \to 0$ עבור $n \to \infty$. מאי שוויון הולדר נובע ש- $f_n * g_n \longrightarrow f*g$ במידה שווה. מ- (3) $f_n * g_n \in C_c(G)$ ולכן $f*g \in C_0(G)$.

(5) נשתמש במשפט פוביני:

$$\int_{G\times G} |f(x-y)g(y)|\,dx\,dy = \int_G |g(y)| \int_G |f(x-y)|\,dx\,dy = \|f\|_1 \|g\|_1$$

ולכן $\phi(x) = \int_G |f(x-y)g(y)|\,dy$ היא "פונקציה" ב- $L^1(G)$. בפרט $\phi(x) < \infty$ כמעט לכל $x$ ולכן $(f*g)(x)$ קיים כמעט לכל $x$. מתקיים $|(f*g)(x)| \leq \phi(x)$ כך ש-

$$\|f*g\| = \int_G \left| \int_G f(x-y)g(y)\,dy \right| dx \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

(6)

$$\begin{aligned}
(f*(g*h))(x) &= \int_G f(x-z)\,(g*h)(z)\,dz \\
&= \int_G f(x-z) \int_G g(z-y)\,h(y)\,dy\,dz \\
&= \int_G\int_G f(x-z-y)\,g(z)\,h(y)\,dy\,dz \qquad (z \leftrightarrow z+y) \\
&= \int_G (f*g)(x-y)\,h(y)\,dy = ((f*g)*h)(x)
\end{aligned}$$

<u>משפט</u>: אם $G$ חבורה קומפקטית מקומית אבלית אז $L^1(G)$ היא אלגברת בנך קומוטטיבית ביחס לקונבולוציה. אם $G$ דיסקרטית אז ל-$G$ יש יחידה.

<u>הוכחה</u>: החלק הראשון נובע בדיוק מהמשפט הקודם + האבחנה הטריוויאלית שהכפל דיסטריבוטיבי: $(f+g)*h = f*h + g*h$.

אם $G$ דיסקרטית, ננרמל את מידת האר כך שהמידה של נקודה $= 1$. ואז

$$(f*g)(x) = \sum_{y\in G} f(x-y)\,g(y)$$

ואם נשים

$$e(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

אז $e\in L^1(G)$ ומקיים $f*e = f$, $\forall f\in L^1(G)$. $\square$

אם $G$ אינה דיסקרטית אז ב-$L^1(G)$ אין יחידה, אבל יש יחידה מקורבת (או - יחידות מקורבות):