הרצאה 13

תורת גלפנד

בהרצאה הקודמת ראינו שאם G חבורה אבלית קומפקטית מקומית אז $L^1(G)$ היא אלגברת בנך קומוטטיבית. תורת גלפנד עוסקת בניתוח אלגבראות כאלה ובין השאר נותנת קשר הדוק לאנליזה הרמונית על חבורות אבליות קומפקטיות מקומית.

תהא A אלגברת בנך קומוטטיבית עם יחידה, ונורמה שתסומן $\|\cdot\|$.

__הגדרה:__ __הספקטרום של A__ שיסומן $\sigma(A)$ הוא אוסף ההומומורפיזמים (של אלגבראות) השונים מאפס $h: A \to \mathbb{C}$. כיון שהגרעין של הומו' כזה הוא אידיאל מקסימלי, $\sigma(A)$ הוא גם __אוסף__ __האידיאלים__ __המקסימליים__ $(0) \subsetneq I \subsetneq A$.
(יש כאן מה להוכיח, זה לא מיידי).

__למה:__ תהא $h \in \sigma(A)$. אז

(1) $h(e)=1$ (e היחידה של A).

(2) אם $x \in A$ הפיך אז $h(x) \neq 0$.

(3) $|h(x)| \leq \|x\|$.

__הוכחה:__ (1) יהי $x \in A$ כך ש- $h(x) \neq 0$. אז $h(e)h(x) = h(ex) = h(x)$ ולכן $h(e)=1$.

(2) אם x הפיך אז $h(x^{-1})h(x) = h(x^{-1}x) = h(e) = 1 \Leftarrow h(x) \neq 0$.

(3) נניח שקיים $x \in A$ עבורו $|h(x)| > \|x\|$. נסמן $\lambda = h(x)$, ונביט באיבר $\lambda e - x \in A$.
מההנחה $\|x\| < |\lambda|$ נובע ש- $\lambda e - x$ הפיך, כאשר באופן מפורש, על ידי הכפלה רואים שהטור $\lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n = [\lambda(e - x/\lambda)]^{-1}$ הוא ההפיך, (ההנחה $\|x\| < |\lambda|$ מבטיחה התכנסות ולכן זהו אכן איבר ב- A).
כעת, ע"י שימוש ב- (2) נקבל $\lambda - h(x) = h(\lambda - ex) \neq 0$.
וזה סותר את $\lambda = h(x)$. כלומר, לכל $x \in A$ $|h(x)| \leq \|x\|$. $\square$

תנאי (3) בטענה הקודמת אומר ש- $\sigma(A)$ היא תת-קבוצה של כדור היחידה הסגור B ב- A^* (כי מתקיים $\|h\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{|h(x)|}{\|x\|} \leq 1$).

נניח ל- $\sigma(A)$ את הטופולוגיה החלשה* = התכנסות נקודתית.

מתנאי (4) בטענה הקודמת נובע שעבור $h\in\sigma(A)$: $h\neq 0 \iff h(e)=1$, ולכן

$$\sigma(A) = \{h\in B \mid h(e)=1 \text{ וגם } h(xy)=h(x)h(y) \quad \forall x,y\in A\}$$

כיוון שהתנאים (i) ו- (ii) הם סגורים, כלומר נשמרים תחת גבולות, נובע ש- $\sigma(A)$ תת-קבוצה סגורה של B ביחס לטופולוגיה החלשה-*. אבל, ממשפט אלאוגלו B קומפקטי ביחס לטופולוגיה זו, ולכן:
$\sigma(A)$ מרחב האוסדורף קומפקטי.

לכל $x\in A$ נגדיר פונקציה $\hat{x}$ על $\sigma(A)$ ע"י

$$\hat{x}(h) = h(x)$$

$\hat{x}$ היא העתקה רציפה על $\sigma(A)$ כי הטופולוגיה על $\sigma(A)$ היא טופולוגיה ההתכנסות הנקודתית.

ההעתקה

$$x \longmapsto \hat{x}$$
$$A \longrightarrow C(\sigma(A))$$

נקראת טרנספורם גלפנד ותסומן גם $\Gamma(x)=\hat{x}$.

<u>משפט</u>: תהא A אלגברת בנך קומוטטיבית עם יחידה ויהי $x\in A$. אז

(1) טרנספורם גלפנד הוא הומו' של אלגבראות $A\to C(\sigma(A))$ ו- $\hat{e}$ = פונקציה הקבועה 1.

(2) x הפיך אם"ם $\hat{x}$ לא מתאפס (= הפיך כפונקציה)

(3) $\mathrm{range}(\hat{x}) = \sigma(x)$

(4) $\|\hat{x}\|_{sup} = \sup\{|\lambda| : \lambda\in\sigma(x)\} \leq \|x\|$

הרדיוס הספקטרלי של x

<u>הוכחה:</u> (1) ברור.

(2) x אינו הפיך $\Leftrightarrow$ האידיאל ב- A הנוצר על ידי x $\subsetneq A$

$\Leftrightarrow$ x מוכל באידיאל מקסימלי.

$\Leftrightarrow$ $h(x)=0$ עבור איזשהו $h\in\sigma(A)$

$\Leftrightarrow$ ל- $\hat{x}$ יש נקודת התאפסות ($= h$).

(3) נובע מ- (2), כי $\lambda\in\sigma(x)$ $\Leftrightarrow$ $\lambda e - x$ אינו הפיך (הגדרת $\sigma(x)$)

$$\Leftrightarrow 0 = h(\lambda e - x) = \lambda - h(x) = \lambda - \hat{x}(h)$$

(4) מיידי מ- (3). $\square$

כעת נעבור לאלגברת בנך $L^1(G)$.

נזכור את הסימון: $\hat{G} = \{\gamma \mid \gamma: G\to\mathbb{T}$ הומו' רצ.$\}$

<u>משפט:</u> לכל $\gamma\in\hat{G}$ ההעתקה $f\mapsto\int_G f(x)\gamma(-x)dx =: \hat{f}(\gamma)$, $L^1(G)\longrightarrow\mathbb{C}$ היא פונקציונל כפלי (הומו') $\neq 0$. יתר על כן, כל הומו' כפלי שונה מ-0 של $L^1(G)$ מתקבל כך. קרקטרים שונים נותנים הומו' שונים.

<u>הוכחה:</u> נניח ש- $f,g\in L^1(G)$. נחשב:

$$\widehat{f*g}(\gamma) = \int_G (f*g)(x)\,\gamma(-x)\,dx$$

$$= \int_G \gamma(-x)\int_G f(x-y)\,g(y)\,dy\,dx$$

$$= \int_G g(y)\,\gamma(-y)\,dy\int_G f(x-y)\,\gamma(-x+y)\,dx$$

$$= \hat{g}(\gamma)\cdot\hat{f}(\gamma)$$

כלומר ההעתקה כפלית, לכיוון שהיא לינארית היא הומו'. שאינו 0 ברור.

כיוון ש- $|\gamma(-x)|=1$ אז $\hat{f}(\gamma)\neq 0$ לאיזשהו $f\in L^1(G)$.

בכיוון ההפוך, נניח ש- $\Phi : L^1(G) \to \mathbb{C}$ הומו' שונה מ-0.
אם ל- $L^1(G)$ יש יחידה אז כאילו בטענה קודמת ש- Φ פונקציונל חסום.
תכונה זו עדיין מתקיימת כאשר אין יחידה - יופיע בתרגיל בית.
ולכן קיימת פונקציה $\phi \in L^\infty(G)$ כך ש-

$$(*) \qquad \Phi(f) = \int_G f(x)\phi(x)\,dx \qquad \forall f \in L^1(G)$$
$$\|\phi\|_\infty = 1$$

אם f ו- g ב- $L^1(G)$, אז:

$$\begin{aligned}\int_G \Phi(f) g(y)\phi(y)\,dy &= \Phi(f)\Phi(g)\\ &= \Phi(f*g)\\ &= \int_G (f*g)(x)\phi(x)\,dx\\ &= \int_G g(y)\,dy\int_G f(x-y)\phi(x)\,dx\\ &= \int_G g(y)\Phi(f_y)\,dy\end{aligned}$$

ולכן - $\Phi(f)\phi(y) = \Phi(f_y)$ כמעט לכל y ב- G.
מרציפות ההעתקות Φ ו- $h \mapsto h_y$ נובע ש- $y \mapsto \Phi(f_y)$ רציפה על G לכל $f \in L^1(G)$. אם נבחר f כזו ש- $\Phi(f) \neq 0$ נקבל ש- $\phi(y)$ מתלכדת כמעט תמיד עם פונקציה רציפה. ולכן, אפשר לשנות את ϕ לפונקציה רציפה מבלי לשנות את $(*)$, ואז $\Phi(f)\phi(y) = \Phi(f_y)$ $\forall y \in G$.
שוויון זה נכון גם אם נחליף $y \leftrightarrow x+y$ ו- $f \leftrightarrow f_x$. נקבל:

$$\Phi(f)\,\phi(x+y) = \Phi(f_{x+y}) = \Phi((f_x)_y) = \Phi(f_x)\,\phi(y) = \Phi(f)\phi(x)\phi(y)$$

ולכן $\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y)$ $\forall x,y \in G$. כיוון ש- $|\phi(x)| \leq 1$ (בנוסף) $\phi(x)\phi(-x) = \phi(0) = 1$ נקבל $|\phi(x)| = 1$, ולכן $\phi \in \hat{G}$.
לבסוף, אם $\hat{f}(\gamma_1) = \hat{f}(\gamma_2)$ לכל $f \in L^1(G)$ אז מהגדרת $f \mapsto \hat{f}(\gamma)$ ינבע ש- $\gamma_1(x) = \gamma_2(x)$ כמעט תמיד אבל מרציפות השניים מתקיים תמיד. □

טרנספורם פוריה: ההעתקה $f \mapsto \hat{f}$ נקראת טרנספורם פוריה של f וזהו בדיוק טרנספורם גלפנד שכן זיהינו:

$$\sigma(L^1(G)) \leftrightarrow \hat{G}$$