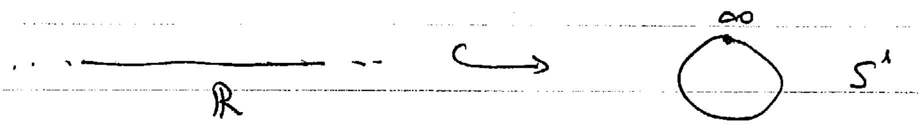
אלגבראות בנך בלי יחידה

ראינו בהרצאה קודמת שלאלגברה $L^1(G)$ יש יחידה אם ורק אם G דיסקרטית.
בסעיף זה נשכן כל אלגברת בנך קומוטטיבית באלגברת בנך קומוטטיבית עם יחידה:
$A \hookrightarrow \tilde{A}$ כך ש- $\tilde{A}/A \cong \mathbb{C}$.

תחילה נדון במקרה של אלגברת הפונקציות $C_0(X)$ כאשר X קומפקטי מקומית.
$C_0(X)$ הן הפונקציות הרציפות f על X המקיימות שלכל $\varepsilon>0$ קיימת קבוצה קומפקטית
$K\subseteq X$ כך ש- $|f(x)|<\varepsilon$ $(\forall x\in X\setminus K)$.
הקומפקטיפיקציה של נקודה עבור X היא הקבוצה $\tilde{X}=X\cup\{\infty\}$ כאשר הטופולוגיה
על $\tilde{X}$ מורכבת מכל הפתוחות של X ומכל המשלימים של קבוצות קומפקטיות של X
בתוך $\tilde{X}$, כלומר $\{X\cup\{\infty\}\setminus K\}$. קל לראות ש- $\tilde{X}$ קומפקטי
וכמובן $X\hookrightarrow\tilde{X}$. למשל:



לעכשיו: $C_0(\mathbb{R})\hookrightarrow C(S^1)$, $\mathbb{C}\cong C(S^1)/C_0(\mathbb{R})$, ותמונת
$C_0(\mathbb{R})$ ב- $C(S^1)$ היא כל הפונקציות המתאפסות בנקודה ∞.

<u>המקרה הכללי</u>: נתונה אלגברת בנך קומוטטיבית A בלי יחידה. נסמן ב- $\tilde{A}$
את האלגברה שהמרחב הוקטורי שלה הוא $A\times\mathbb{C}$, החיבור לפי
קואורדינטות, והכפל נתון ע"י:

$$(x,a)(y,b)=(xy+ay+bx,\ ab)$$

אז $\tilde{A}$ אלגברה עם יחידה: $(0,1)$, והנורמה

$$\|(x,a)\|=\|x\|+|a|$$

הוכחת את $\tilde{A}$ אלגברת בנך קומוטטיבית עם יחידה. יתר על כן $A\times\{0\}$ אידיאל מקסימלי ב-$\tilde{A}$.

דוגמא:

תהא $A=L^1(\mathbb{R})$. ההעתקה $f\mapsto\mu_f$ הנתונה ע"י $d\mu_f(x)=f(x)dx$ מגדירה שיכון של $L^1(\mathbb{R})$ לתוך $M(\mathbb{R})=$ מרחב מידות הבורל הסופיות על $\mathbb{R}$. $M(\mathbb{R})$ בעצמה היא אלגברת בנך עם כפל (קונבולוציה) המוגדר ע"י:

$$\int_{\mathbb{R}} f\,d(\mu*\nu)=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x+y)\,d\mu(x)\,d\nu(y)$$

ב-$M(\mathbb{R})$ יש יחידה: מידת דירק $\delta(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$.
במקרה זה:

$$\widetilde{L^1(\mathbb{R})}=L^1(\mathbb{R})+\mathbb{C}\delta$$

והנורמה $\|\mu\|=|\mu|(\mathbb{R})$ על $M(\mathbb{R})$, מצומצמת ל-$L^1(\mathbb{R})$ נותנת את $\|\cdot\|_1$

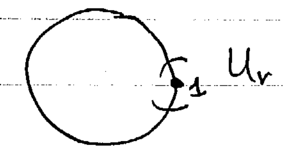
הטופולוגיה של $\hat{G}$

טרנספורם גלפנד נותן לנו זיהוי $\hat{G} \simeq \sigma(L^1(G))$ כקבוצות. זיהוי זה נותן מבנה טופולוגי על $\hat{G}$. נרצה להראות שמבנה זה תואם את מבנה החבורה, כלומר ש-$\hat{G}$ חבורה אבלית קומפקטית מקומית. לשם כך ניתן תיאור נוסף לטופולוגיה זו.

משפט:

(1) ההעתקה
$$G \times \hat{G} \longrightarrow \mathbb{T}$$
$$(x, \gamma) \longmapsto \gamma(x)$$
היא רציפה.

(2) תהיינה $K \subset G$ ו-$C \subset \hat{G}$ תתי קבוצות קומפקטיות, ויהי $r > 0$. נסמן ב-U_r את אוסף המספרים $z \in \mathbb{T}$ המקיימים $|1-z| < r$.



ונגדיר

$$N(K,r) = \{ \gamma \in \hat{G} \mid \gamma(x) \in U_r \quad \forall x \in K \}$$
$$N(C,r) = \{ x \in G \mid \gamma(x) \in U_r \quad \forall \gamma \in C \}$$

אז $N(K,r)$ ו-$N(C,r)$ קבוצות פתוחות של G ו-$\hat{G}$.

(3) המשפחה של הקבוצות $N(K,r)$ מהווה בסיס לטופולוגיה של $\hat{G}$.

(4) $\hat{G}$ חבורה אבלית קומפקטית מקומית.

הוכחה

(1) נשים לב שמתקיים: $\hat{f}_x(\gamma) = \gamma(x)\hat{f}(\gamma)$ $\quad (x,\gamma)\in G\times\hat{G}$

אכן:

$$\hat{f}_x(\gamma) = \int_G f_x(y)\,\gamma(-y)\,dy$$
$$= \int_G f(y-x)\,\gamma(-y)\,dy$$
$$= \left(\int_G f(y-x)\,\gamma(-x-y)\,dy\right)\cdot\gamma(x)$$
$$= \hat{f}(\gamma)\cdot\gamma(x)$$

לכן מספיק להראות ש- $(x,\gamma)\mapsto\hat{f}_x(\gamma)$ רציפה לכל $f\in L^1(G)$.
נקבע x_0, γ_0 ו- $\varepsilon>0$. קיימות סביבות $V\ni x_0$ ו- $W\ni\gamma_0$
כך ש-

(1) $\|f_x - f_{x_0}\|_1 < \varepsilon$

$\forall (x,\gamma)\in V\times W$

(2) $|\hat{f}_{x_0}(\gamma) - \hat{f}_{x_0}(\gamma_0)| < \varepsilon$

(1) נובע מרציפות $x\mapsto f_x$, (2) נובע מרציפות $\hat{f}$. ולכן

$$|\hat{f}_x(\gamma) - \hat{f}_{x_0}(\gamma_0)| \leq \underbrace{|\hat{f}_x(\gamma) - \hat{f}_{x_0}(\gamma)|}_{\substack{\leq\ (\text{כדוגמה}) \\ \|f_x - f_{x_0}\|_1 \\ <\ \varepsilon\ (1)}} + \underbrace{|\hat{f}_{x_0}(\gamma) - \hat{f}_{x_0}(\gamma_0)|}_{<\ \varepsilon\ (2)}$$

$$< 2\varepsilon$$

← הוכח (1).

(2) תהא $K \subseteq G$ קומפקטית, $r>0$ ו-$\gamma_0 \in N(K,r)$. נראה שקיימת סביבה של γ_0 המוכלת ב-$N(K,r)$.

לכל $x_0 \in K$ יש סביבות $x_0 \in V_{x_0}$ ו-$\gamma_0 \in W_{x_0}$ כך ש-

$$\gamma(x) \in U_r \qquad \forall (x,\gamma) \in V_{x_0} \times W_{x_0}$$

כיוון ש-K קומפקטית קיים אוסף סופי של V_{x_0} המכסים את K.
נסמן ב-W_0 את חיתוך ה-W_{x_0} המתאימים לכיסוי.
אז W_0 היא סביבה של γ_0 בתוך $N(K,r)$ ולכן היא פתוחה.
הוכחה זהה עובדת עבור $N(C,r)$.

(3) תהא V סביבה של γ_0 (ביחס לטופולוגיה המתקבלת מהזיהוי $\hat{G} \cong \sigma(L^1(G))$).
יש להראות ש-$\gamma_0 + N(K,r) \subseteq V$ עבור K קומפקטית ו-$r>0$.
בה"כ אפשר לקחת $\gamma_0 = 0$.
מהגדרת הטופולוגיה τ שהגדרנו על $\hat{G}$ נובע שקיימות $f_1, \dots, f_n \in L^1(G)$ ו-$\varepsilon > 0$ כך ש-

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{ \gamma \mid |\hat{f}_i(\gamma) - \hat{f}_i(0)| < \varepsilon \} \subseteq V$$

כך נראית קבוצה בסיסית בטופולוגיה החלשה*

כיוון ש-$C_c(G)$ צפופה ב-$L^1(G)$ אפשר להניח כי $f_1, \dots, f_n$ מתאפסות מחוץ לאיזשהי תת-קבוצה קומפקטית $K \subseteq G$.
אם

$$r < \frac{\varepsilon}{\max_i \|f\|_1}$$

ואם $\gamma \in N(K,r)$ אז

$$|\hat{f}_i(\gamma) - \hat{f}_i(0)| \le \int_K |\gamma(-x) - 1| |f_i(x)| \, dx \le r \cdot \|f_i\|_1 < \varepsilon$$

ולכן $N(K,r) \subseteq V$.

(4) בהינתן $\gamma_1,\gamma_2 \in \hat{G}$ ו- $N(K,r)$, מתקיים

$$\left[\gamma_1 + N(K, r/2)\right] - \left[\gamma_2 + N(K, r/2)\right] \subseteq \gamma_1 - \gamma_2 + N(K,r)$$

ולכן ההעתקה $(\gamma_1,\gamma_2) \mapsto \gamma_1+\gamma_2$ רציפה מ- $\hat{G}\times\hat{G}$ אל $\hat{G}$. ∎