הרצאה כג

אלגברת המידות ופונקציות מוגדרות חיוביות

הקשר הבא: אנחנו בדרך להוכחת דואליות פונטריגין שבירושה $G \cong \hat{\hat{G}}$
כאשר G חבורה קומפקטית מקומית אבלית. לשם כך נגדיר ונחקור שני אובייקטים:

- אלגברת המידות על G שתסומן $M(G)$.
- פונקציות מוגדרות חיוביות על G שיסומנו $P(G)$.

$M(G)$

אם G קומפקטית מקומית אבלית נסמן

$$M(G) = \{ \text{מידות רגולריות מרוכבות סופיות על } G \}$$

ראינו כבר ש-$M(G)$ היא מרחב בנך עם

חיבור: $(\mu+\nu)(E)=\mu(E)+\nu(E)$

כפל בסקלר: $(c\mu)(E)=c\cdot\mu(E)$

נורמה: $\|\mu\|=|\mu|(G)$

נגדיר כפל על $M(G)$: לכל $\mu,\nu\in M(G)$

$$(\mu*\nu)(E)=(\mu\times\nu)\left(\{(x,y)\in G\times G \mid x+y\in E\}\right)$$

הגדרה זו היא מקרה פרטי של בניה שעובדת באופן כללי, אם

$$f: X\longrightarrow Y$$

פונקציה מדידה בין שני מרחבי מידה, אפשר "לדחוף" מידות מ-X ל-Y
בהינתן μ מידה על X, נגדיר $\forall E\subset Y$ מדידה

$$f(\mu)(E)=\mu(f^{-1}(E))$$

במקרה שלנו הפונקציה f היא "+" $G\times G\longrightarrow G$, $(x,y)\mapsto x+y$

ו- $\mu * \nu$ היא הדחיפה של המידה $\mu\times\nu$ על $G\times G$.

מתקיים

(1) אם $\mu,\nu\in M(G)$ אז $\mu*\nu\in M(G)$.

(2) $*$ קומוטטיבי ואסוציאטיבי

(3) $\|\mu*\nu\| \le \|\mu\|\|\nu\|$

ולכן

משפט: $M(G)$ היא אלגברת בנך עם יחידה.

הוכחה: (1) מספיק לבדוק עבור מידות אי-שליליות, נראה ש- $\mu*\nu$ רגולרית. נניח ש- $E\subset G$ מדידה ויהי $\varepsilon>0$. כיוון ש- $\mu\times\nu$ רגולרית, קיימת קומפקטית $K\subseteq E_{(2)}=\{(x,y)\mid x+y\in E\}$ כך ש-

$$(\mu\times\nu)(K) > (\mu\times\nu)(E_{(2)})-\varepsilon$$

אם C היא תמונת K תחת העתקת החיבור $(x,y)\mapsto x+y$ אז C תת-קבוצה קומפקטית של E, $K\subseteq C_{(2)}$ ולכן

$$(\mu*\nu)(C) = (\mu\times\nu)(C_{(2)}) \ge (\mu\times\nu)(K) > (\mu*\nu)(E)-\varepsilon$$

ולכן $\mu*\nu$ רגולרית פנימית, ובאותו אופן בדיוק מראים שהיא רגולרית חיצונית.

(2) כיוון ש- $x+y\in E \iff y+x\in E$ נובע ש- $\mu*\nu=\nu*\mu$.

האסוציאטיביות נובעת ממשפט פוביני: שתי המידות $\mu*(\nu*\lambda)$, $(\mu*\nu)*\lambda$ מתלכדות עם המידה

$$``\mu*\nu*\lambda"(E) := (\mu\times\nu\times\lambda)(\{(x,y,z)\in G^3 \mid x+y+z\in E\})$$

(3) מהגדרת המידה $\mu*\nu$ נובע:

$$\int_G f\,d(\mu*\nu) = \int_G\int_G f(x+y)\,d\mu(x)\,d\nu(y) \qquad (\star)$$

ולכן, אם $|f(x)|\le 1$ לכל $x\in G$, אז

$$\left|\int_G f(x+y)\,d\mu(x)\right| \le \|\mu\|$$

ולכן מ- $(\star)$ נובע $\|\mu*\nu\|\le\|\mu\|\|\nu\|$

לבסוף, היחידה באלגברה $M(G)$ היא המידה האטומית

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$\square$

טרנספורם פורייה של $M(G)$

לכל $\mu\in M(G)$ נגדיר פונקציה $\hat{\mu}$ על $\hat{G}$ על γ ע"י

$$\hat{\mu}(\gamma)=\int_G \gamma(-x)\,d\mu(x)$$

זו הרחבה של טרנספורם פורייה מ-$L^1(G)$ ל-$M(G)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}: M(G) & \longrightarrow & C(\hat{G}) \\ ① \uparrow & & \uparrow ③ \\ \mathcal{F}: L^1(G) & \xrightarrow{②} & C_0(\hat{G}) \end{array} \qquad (\mathcal{F}f=\hat{f})$$

כאשר ① $L^1(G)\hookrightarrow M(G)$ ע"י $f\mapsto\mu_f$ באשר $\mu_f(E)=\int_E f\,dx$.

② הוכחנו

③ ברור

④ נובע מהמשפט הבא.

משפט: (1) לכל $\mu\in M(G)$, $\hat{\mu}$ חסומה ורציפה במ"ש.

(2) $\widehat{\nu*\mu}=\hat{\nu}\cdot\hat{\mu}$. בפרט, כל $\gamma\in\hat{G}$ מגדיר פונקציונל כפלי על $M(G)$:

(3) תמונת $M(G)$ תחת טרנספורם פורייה סגורה להכפלות באיברי $\hat{x}$, ונזהה בפונקציות $x(\gamma)=\gamma(x)$ לכל $x\in G$ ותחת הצמדה מרוכבת.

הוכחה: (1) מגדירת $\hat{\mu}$ $|\hat{\mu}(\gamma)|\le\|\mu\|$, לכל $\gamma\in\hat{G}$. בהינתן $\varepsilon>0$, מרגולריות $|\mu|$ נובע שקיימת קבוצה קומפקטית $K\subset G$ כך ש $|\mu|(G\setminus K)<\varepsilon$

ולכן לכל $\gamma_1,\gamma_2\in\hat{G}$ מתקיים:

$$|\hat{\mu}(\gamma_1)-\hat{\mu}(\gamma_2)|\le\int_G|\gamma_1(-x)-\gamma_2(x)|\,d|\mu|(x)=\int_G|1-(\gamma_1-\gamma_2)(-x)|\,d|\mu|(x)$$

לכן, עבור $\gamma_1-\gamma_2\in N(K,\delta)$ מתקיים

$$\int_G |1-(\gamma_1-\gamma_2)(-x)|\,d|\mu|(x) \le \delta\int_K d|\mu| + 2\int_{K'} d|\mu|(x)$$

$$\le \delta\cdot\|\mu\| + 2\delta$$

(2) עשינו חשבון כזה כבר מספר פעמים: פוביני....

(3)(•) אם $d\nu(x)=\gamma_0(x)\,d\mu(x)$ עבור $\gamma_0\in\hat G$ אז

$$\hat\nu(\gamma) = \int_G \gamma_0(x)\cdot\gamma(-x)\,d\mu(x)$$

$$= \int_G (\gamma-\gamma_0)(x)\,d\mu(x) = \hat\mu(\gamma-\gamma_0)$$

<u>כלומר:</u>
כפל בקרקטר γ_0 של המידה (או הפונקציה ב-$L^1(G)$) שווה להזזת הטרנספורם ב-γ_0.

(••) אם $\nu(E)=\mu(E-x)$ (הזזת המידה ב- $x\in G$) אז

$$\hat\nu(\gamma) = \int_G \gamma(-y)\,d\nu(y)$$

$$= \int_G \gamma(x)\,\gamma(-x-y)\,d\mu(y-x)$$

$$= \gamma(x)\,\hat\mu(\gamma)$$

(•••) נסמן $\tilde\mu(E):=\overline{\mu(-E)}$ אזי

$$\hat{\tilde\mu}(\gamma) = \int_G \gamma(-x)\,d\tilde\mu(x)$$

$$= \int_G \overline{\gamma(x)}\;\overline{d\mu(-x)} = \overline{\int_G \gamma(-x)d\mu(x)} = \overline{\hat\mu}(\gamma)$$

$\square$