הרצאה 16

פונקציות מוגדרות חיובית

<u>הגדרה</u>: פונקציה $\varphi: G \to \mathbb{C}$ נקראת <u>מוגדרת חיובית</u> אם לכל $n \in \mathbb{N}$, ולכל $x_1,\dots,x_n \in G$, $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{C}$ מתקיים

$$(*) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j}\, \varphi(x_i - x_j) \geq 0$$

<u>למה</u>: אם φ מוגדרת חיובית אז

$$(\bullet) \qquad \varphi(-x) = \overline{\varphi(x)} \qquad \forall x \in G$$

$$(\bullet\bullet) \qquad |\varphi(x)| \leq \varphi(0) \qquad \forall x \in G$$

, בפרט φ חסומה.

<u>הוכחה</u>: ניקח $n=2$ בתנאי $(*)$ ונציב $x_1 := x$ ו- $x_2 := 0$. אזי, התנאי אומר שהמטריצה

$$A = \begin{bmatrix} \varphi(0) & \varphi(x) \\ \varphi(-x) & \varphi(0) \end{bmatrix}$$

מוגדרת אי-שלילית. לכן $A = A^* \Rightarrow \varphi(-x) = \overline{\varphi(x)}$, וכן $\det A \geq 0 \Rightarrow \varphi(0)^2 - \varphi(x)\varphi(-x) \geq 0 \Rightarrow |\varphi(x)| \leq \varphi(0)$. $\square$

<u>דוגמאות</u>

(1) תהי $f \in L^2(G)$ ונסמן $\varphi := f^* * f$, כאשר $f^*(x) = \overline{f(-x)}$. אזי φ מוגדרת חיובית ורציפה על G. אכן, הקונבולוציה של שתי פונקציות על G שהן ב- $L^2(G)$ היא רציפה (הלמה של רימן-לבג) ולגבי החיוביות:

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j}\, \varphi(x_i - x_j) = \sum c_i \overline{c_j} \int_G f(x_i - x_j - y)\overline{f(-y)}\, dy$$

$$= \sum c_i \overline{c_j} \int_G f(x_i - y)\overline{f(x_j - y)}\, dy$$

$$= \int_G \Big| \sum_i c_i f(x_i - y) \Big|^2 dy \geq 0$$

(2)(·) כל קרקטר $\gamma \in \hat{G}$ הוא מוגדרת חיובית, ולכן גם כל צירוף $\sum_{i=1}^{m} a_i \gamma_i$ כאשר $a_i \geq 0$, מוגדר חיובית.

(··) יתר על כן: אם $\mu \in M(\hat{G})$ ו- $\mu \geq 0$ אז

$$\varphi(x) := \int_{\hat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma) \qquad (x \in G)$$

מוגדרת חיובית, ורציפה. ((··) $\Leftarrow$ (·) אם נקח מידה אטומית המרוכזת ב- γ).

הסבר ל- (··):

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \bar{c}_j \varphi(x_i - x_j) = \int_{\hat{G}} \sum_{i,j=1}^{n} c_i \bar{c}_j \gamma(x_i - x_j)\, d\mu(\gamma)$$

$$= \int_{\hat{G}} \left| \sum_{i=1}^{n} c_i \gamma(x_i) \right|^2 d\mu(\gamma) \geq 0$$

הרציפות נובעת בדיוק באותו אופן שבו $\hat{\mu}(\gamma) = \int_G \gamma(-x)\, d\mu(x)$ רציפה.

המשפט הבא מראה שכך מתקבלות כל הפונקציות המוגדרות חיובית.

<u>משפט בוכנר</u>: פונקציה רציפה $\varphi : G \to \mathbb{C}$ היא מוגדרת חיובית אם ורק אם קיימת מידה אי-שלילית $\mu \in M(\hat{G})$ כך ש- $\varphi(x) = \int_{\hat{G}} \gamma(x)\, d\mu(\gamma)$.

<u>הוכחה</u>: תהא φ רציפה ומוגדרת חיובית, ונניח בה"כ ש- $\varphi(0) = 1$.

נגדיר

$$T_\varphi : L^1(G) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$f \longmapsto T_\varphi(f) = \int_G f(x)\varphi(x)\, dx$$

וכן

$$\forall f, g \in L^1(G); \quad \langle f, g \rangle_\varphi = T_\varphi(g^* * f)$$

נראה מיד ש:

(·) $\langle \,,\, \rangle_\varphi$ ת' לינארית ברכיב הראשון (ברור)

(··) $\langle f, g \rangle_\varphi = \overline{\langle g, f \rangle_\varphi}$

(···) $\langle f, f \rangle_\varphi \geq 0$

אכן, מהגדרת $\langle\,,\rangle_\varphi$ נקבל

$$\langle f,g\rangle_\varphi = \iint_{G\,G} f(x)\overline{g(y)}\,\varphi(x-y)\,dx\,dy$$

לכן $(\cdot)$, $(\cdot\cdot)$ נובעים. לגבי $(\because)$, נבחר $f\in C_c(G)$ עם תומך K, אז הפונקציה $f(x)\overline{f(y)}\varphi(x-y)$ רציפה בעלת תומך $K\times K$, ואפשר לחלק את K לתת-קבוצות זרות $E_1,\dots,E_n$ כך שהסכום

$$(\ast)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} f(x_i)\overline{f(x_j)}\,\varphi(x_i-x_j)\,\mu(E_i)\,\mu(E_j)\qquad (x_i\in E_i)$$

מהווה קירוב טוב כרצוננו לאינטגרל

$$(\nabla)\qquad \iint_{G\,G} f(x)\overline{f(y)}\,\varphi(x-y)\,dx\,dy$$

(כאשר μ מידת האר על G).

כיוון ש-φ מוגדרת חיובית, $(\ast)$ תמיד ≥ 0 ולכן גם $(\nabla)\geq 0$ לכל $f\in C_c(G)$.
כיוון ש-$C_c(G)$ צפופה ב-$L^1(G)$, (∇) נכון לכל $f\in L^1(G)$ $\Leftarrow$ $\langle f,f\rangle_\varphi\geq 0$.
תכונות $(\cdot)$, $(\cdot\cdot)$ ו-$(\because)$ הן מה שדרוש להוכחת אי-שוויון שוורץ המוכר

$$|\langle f,g\rangle_\varphi|^2 \leq \langle f,f\rangle_\varphi\,\langle g,g\rangle_\varphi$$

אם ניקח עכשיו $g=\frac{1}{\mu(V)}\mathbb{1}_V$, פונקציה מציינת של סביבה סימטרית V של 0, נקבל

$$(1)\qquad \left\langle f,\frac{1}{\mu(V)}\mathbb{1}_V\right\rangle_\varphi - T_\varphi(f) = \int_G f(x)\,\frac{1}{\mu(V)}\int_V\big(\varphi(x-y)-\varphi(x)\big)\,dy\,dx$$

$$(2)\qquad \left\langle \frac{1}{\mu(V)}\mathbb{1}_V,\frac{1}{\mu(V)}\mathbb{1}_V\right\rangle - 1 = \frac{1}{\mu(V)^2}\iint_{V\,V}\big(\varphi(x-y)-1\big)\,dx\,dy$$

כיוון ש-φ רציפה במידה שווה הביטויים (1) ו-(2) קרובים ל-0 כרצוננו על ידי הקטנת V, ולכן

$$(\square)\qquad |T_\varphi(f)|^2 \leq \langle f,f\rangle_\varphi = T_\varphi(f^{*}*f)$$

נסמן $h=f^* * f$, $h^n=h^{n-1}*h$ $(n\geq 2)$.
כיוון ש- $\varphi(0)=\|\varphi\|_\infty=1$ מתקיים $\|T_\varphi\|=1$ ואם נציב את h^n $(n\geq 1)$ באי-שוויון (□) נקבל

$$|T_\varphi(f)|^2\leq T_\varphi(h)\leq \left(T_\varphi(h^2)\right)^{1/2}\leq\cdots\leq\left(T_\varphi(h^{2^n})\right)^{2^{-n}}\leq \|h^{2^n}\|_1^{2^{-n}}=\|\hat h\|_\infty$$

(ע"ר.)

מכאן

$$(+)\qquad |T_\varphi(f)|\leq\|\hat f\|_\infty$$

לסכם:

$$\begin{tikzcd}
L^1(G) \arrow[r, "T_\varphi"] \arrow[d, "F"'] & \mathbb{C} \\
F(L^1(G)) \arrow[ur, dotted] & T_\varphi(f) \\
\hat f \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

עדיין לא הוכחנו ש- F חח"ע, אבל (+) אומר ש- $\hat f_1=\hat f_2 \Rightarrow T_\varphi(f_1)=T_\varphi(f_2)$
ולכן ההעתקה $\hat f\mapsto T_\varphi(f)$ מוגדרת היטב על $F(L^1(G))\subseteq C_0(\hat G)=C_0(\sigma(L^1(G)))$.
כיוון ש- $F(L^1(G))$ מפרידה נקודות וסגורה להצמדה, היא צפופה ב- $C_0(\hat G)$ ממשפט סטון-ויירשטראס. ולכן ההעתקה $\hat f\mapsto T_\varphi(f)$ מתרחבת לפונקציונל רציף על $C_0(\hat G)$ מנורמה ≤ 1. לפי משפט ריס יש מידה $\tilde\mu\in M(\hat G)$ עם $\|\tilde\mu\|\leq 1$ המקיימת

$$T_\varphi(f)=\int_G f(x)\varphi(x)\,dx=\int_{\hat G}\hat f(\gamma)\,d\tilde\mu(\gamma)=\int_G\int_{\hat G} f(x)\gamma(-x)\,d\tilde\mu(\gamma)\,dx$$

$$=\int_G f(x)\left(\int_{\hat G}(-\gamma)(x)\,d\tilde\mu(\gamma)\right)dx$$

ולכן $\varphi(x)=\int_{\hat G}\gamma(x)\,d\mu(\gamma)$, כאשר $d\mu(\gamma)=d\tilde\mu(-\gamma)$.

כיוון ש- $1=\varphi(0)=\mu(\hat G)\leq\|\mu\|\leq 1$, נקבל $\|\mu\|=\mu(\hat G)$ ולכן $\mu\geq 0$.

□

קיבלנו:

$$\underline{G} \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\hat{G}}$$

פונ' מוגדרות חיוביות (רציפות) $= P(G) \quad \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \quad M^+(\hat{G}) = \{\mu \in M(G);\ \mu \geq 0\}$

$$\cap \qquad\qquad\qquad\qquad \cap$$

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(P(G)) = B(G) \quad \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \quad M(\hat{G})$$

$$\varphi_\mu \longleftarrow \mu$$

$\varphi \longmapsto \mu_\varphi$ } סימון להתאמה זו

<u>משפט</u> (היפוך פוריה Fourier Inversion)

(1) $f \in B(G) \cap L^1(G) \Leftarrow \hat{f} \in L^1(\hat{G})$

(2) עבור מידת האר נתונה על G, אפשר לנרמל את מידת האר על $\hat{G}$ כך שמתקיימת נוסחת ההיפוך

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\gamma)\,(x,\gamma)\,d\gamma$$

(רשמנו (x,γ) במקום $\gamma(x)$ כדי ליצור סימטריה בין x ו- γ).

<u>הוכחה</u>

<u>למה 1</u>: אם $K \subseteq \hat{G}$ קומפקטית אז קיימת $f \in C_c(G) \cap P(G)$ המקיימת $\hat{f} \geq 0$ על $\hat{G}$ ו- $\hat{f} > 0$ על K.

<u>הוכחה</u>: נבחר $h \in C_c(G)$ המקיימת $\hat{h}(0) = \int_G h\,dx = 1$ ותהי $g = h^* * h$. אז $\hat{g} = |\hat{h}|^2$ ובפרט $\hat{g} \geq 0$ ו- $\hat{g}(0) = 1$. מרציפות, קיימת סביבה V של 0 שעבורה $\hat{g} > 0$. נכסה את K במספר סופי של הזזות של V, כלומר $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n \gamma_i + V$. תהי $f = (\sum_{i=1}^n \gamma_i) g$. אז $\hat{f}(\gamma) = \sum_{i=1}^n g(\gamma - \gamma_i)$ כי כפל בקרקטר הופך להזזה אחרי הפעלת טרנספורמציה פוריה. אז $\hat{f} > 0$ על K ו- $\hat{f} \geq 0$ על $\hat{G}$. מהדוגמא שראינו $g \in P(G)$ ולכן גם $f \in P(G)$. $\square$

<u>למה 2</u>: אם $f,g \in B(G)\cap L^1(G)$ אז $\hat{f}\, d\mu_g = \hat{g}\, d\mu_f$.

<u>הוכחה</u>: אם $h \in L^1(G)$ אז מתקיים

$$\int_{\hat{G}} \hat{h}\, d\mu_f = \int_{\hat{G}} \underbrace{\left(\int_G h(x)(-x,\gamma)\,dx\right)}_{\hat{h}(\gamma)} d\mu_f(\gamma) = \int_G h(x)\, f(-x)\,dx$$

$$= (h * f)(0)$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\hat{G}} \hat{h}\,\hat{g}\, d\mu_f = (h*g)*f\,(0) = (h*f)*g\,(0) = \int_{\hat{G}} \hat{h}\,\hat{f}\, d\mu_g$$

כיוון ש- $\mathcal{F}(L^1(G))$ צפוף ב- $C_0(\hat{G})$ נובע ש- $\hat{g}\, d\mu_f = \hat{f}\, d\mu_g$. □

(תזכורת להוכחת המשפט): נגדיר פונקציונל ליניארי על $C_c(\hat{G})$.
אם $\psi \in C_c(\hat{G})$, לפי למה 1 מבחינה קיים $f \in L^1(G)\cap P(G)$ כך ש- $\hat{f} > 0$ על $\mathrm{supp}\,\psi$. נגדיר

$$I(\psi) = \int_{\hat{G}} \frac{\psi}{\hat{f}}\, d\mu_f$$

אם g פונקציה אחרת המקיימת $\hat{g} > 0$ על $\mathrm{supp}\,\psi$ אז

$$\int \frac{\psi}{\hat{f}}\, d\mu_f = \int \frac{\psi}{\hat{f}\hat{g}}\,\hat{g}\, d\mu_f = \int \frac{\psi}{\hat{f}\hat{g}}\,\hat{f}\, d\mu_g = \int \frac{\psi}{\hat{g}}\, d\mu_g$$

לכן $I(\psi)$ אינו תלוי בבחירה של f. I ליניארי ומקיים $I(\psi)\geq 0$ אם $0 \leq \psi$ כי $\hat{f} \geq 0$ ו- $\mu_f \geq 0$. יתר על כן, אם $g \in B(G)\cap L^1(G)$ אז

$$I(\hat{g}\psi) = \int \frac{\psi}{\hat{f}}\,\hat{g}\, d\mu_f = \int \psi\, d\mu_g$$

(כיוון שאפשר תמיד לבחור ψ ו- g כך ש- $\int \psi\, d\mu_g \neq 0$ נובע ש- $I \not\equiv 0$.
מכאן ש- I הוא פונקציונל ליניארי חיובי על $C_c(\hat{G})$. בנוסף, אם $\beta \in \hat{G}$

$$\int_{\hat{G}} (x,\gamma)\, d\mu_f(\beta+\gamma) = \int_{\hat{G}} (x,-\beta+\gamma)\, d\mu_f(\gamma) = \overline{(x,\beta)}\, f(x) = (\bar{\beta}\cdot f)(x)$$

ולכן

$$d\mu_{\bar\beta f}(\gamma) = d\mu_f(\beta+\gamma)$$

בנוסף

$$\widehat{\bar\beta f}(\gamma) = \hat f(\gamma-\bar\beta) = \hat f(\beta+\gamma)$$

ולכן, אם נבחר f כך ש- $\hat f > 0$ על $\mathrm{supp}(\psi) \cup \mathrm{supp}\,\psi_\beta$, נקבל

$$I(\psi_\beta) = \int \frac{\psi(\gamma-\beta)}{\hat f(\gamma)}\, d\mu_f(\gamma)$$

$$= \int \frac{\psi(\gamma)}{\hat f(\gamma+\beta)}\, d\mu_f(\gamma+\beta) \qquad \gamma \leftrightarrow \gamma+\beta$$

$$= \int \frac{\psi(\gamma)}{\widehat{\bar\beta f}(\gamma)}\, d\mu_{\bar\beta f}(\gamma)$$

$$= I(\psi)$$

כלומר, I שמ' אינוו' להזזות, ולכן $I(\psi) = \int_{\hat G} \psi(\gamma)\, d\gamma$
כאשר $d\gamma$ מידת האר על $\hat G$

בפרט, אם $f \in B(G) \cap L^1(G)$ ו- $\psi \in C_c(\hat G)$ נקבל

$$\int_{\hat G} \psi(\gamma)\, \hat f(\gamma)\, d\gamma = I(\psi \hat f) = \int_{\hat G} \psi\, d\mu_f$$

ולכן $d\mu_f = \hat f\, d\gamma$, בפרט $\hat f \in L^1(G)$ ומהיפוך

$$f(x) = \int_{\hat G} (x,\gamma)\, d\mu_f(\gamma) = \int_{\hat G} (x,\gamma)\, \hat f(\gamma)\, d\gamma$$

$\square$