משפט פלנשרל ודואליות פונטריאגין.

לפני שנעבור לשני המשפטים המרכזיים בנושא, נדון במקרה G קומפקטית / דיסקרטית.

טענה: אם G קומפקטית אז $\hat{G}$ דיסקרטית, ואם G דיסקרטית אז $\hat{G}$ קומפקטית. יתר על כן אם המידה של החבורה הקומפקטית G היא מידת הסתברות אז המידה של $\hat{G}$ היא מידת המניה ולהיפך. כלומר בהנחה שהמידה של החבורה הדואלית מנורמלת לפי משפט ההיפוך.

הוכחה: אם G דיסקרטית אז ב- $L^1(G)$ יש יחידה ולכן $\hat{G} \simeq \sigma(L^1(G))$ קומפקטית.

אם G קומפקטית ומידת הא מנורמלת כך ש- $\mu(G)=1$ אז מתקיים

$$(*) \qquad \int_G (x,\gamma)\, dx = \begin{cases} 1 & \gamma = 0 \\ 0 & \gamma \neq 0 \end{cases}$$

הסבר: $\gamma = 0$ ברור. אם $\gamma \neq 0$ אז $(x_0,\gamma) \neq 1$ לאיזשהו $x_0 \in G$, ואז

$$\int_G (x,\gamma)\, dx = (x_0,\gamma)\int_G (x-x_0,\gamma)\, dx = (x_0,\gamma)\int_G (x,\gamma)\, dx$$

מכאן אם ניקח $f \equiv 1$, אז $f \in L^1(G)$ מקומפקטיות ומתקיים מ- $(*)$

$$\hat{f}(\gamma) = \begin{cases} 1 & \gamma = 0 \\ 0 & \gamma \neq 0 \end{cases}$$

כיוון ש- $\hat{f}$ רציפה, היחידון $\{0\}$ פתוח ב- $\hat{G}$ ולכן $\hat{G}$ דיסקרטית.

נשתמש עכשיו בנוסחת ההיפוך, עבור G קומפקטית:

$$1 = f(0) = \int \hat{f}(\gamma)\, d\gamma = \mu_{\hat{G}}(\{0\}) = \text{מידת המניה}$$

עבור G דיסקרטית, ניקח $f(0)=1$, $f(x)=0 \ \forall x \neq 0$ ואז

$$1 \equiv \hat{f}(\gamma) \Rightarrow \mu(G) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\gamma)\, d\gamma = f(0) = 1 \qquad \square$$

הערה: הראו שעבור $G=\mathbb{R}$, הבחירה dx (=לבג) מכתיבה את הבחירה $\frac{1}{2\pi}dx$ על $\hat{\mathbb{R}}\cong\mathbb{R}$.
לפעמים נוח לבחור באופן סימטרי $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx$ על $\mathbb{R}$ ו- $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}d\lambda$ על $\hat{\mathbb{R}}$.

משפט פלנשרל

טרנספורם פוריה, כשהוא מצומצם ל- $L^1(G)\cap L^2(G)$ הוא איזומטריה (ביחס לנורמת L^2) של G על תת-מרחב צפוף של $L^2(\hat{G})$, ולכן ניתן להרחיב אותו באופן יחיד לאיזומטריה $L^2(G)\cong L^2(\hat{G})$.

הוכחה: אם $f\in L^1(G)\cap L^2(G)$ אז $g=f^* * f$ נמצא ב- $L^1(G)$, g רציפה ומוגדרת חיובית, $|\hat{g}|=|\hat{f}|^2$ ומשפט ההיפוך נותן

$$\int_G |f(x)|^2\,dx = \int_G f(x)\overline{f(x)}\,dx$$

$$= \int_G f(x) f^*(-x)\,dx$$

$$= g(0).$$

$$= \int_{\hat{G}} \hat{g}(\gamma)\,d\gamma = \int_G |\hat{f}(\gamma)|^2\,d\gamma$$

כלומר $\|f\|_2=\|\hat{f}\|_2$.

צפיפות התמונה:

נסמן $\Phi=\{\hat{f}\mid f\in L^1(G)\cap L^2(G)\}$. מאחר ו- $L^1(G)\cap L^2(G)$ אינווריאנטי להזזות נובע ש- Φ אינווריאנטית תחת כפל ב- (x,γ) לכל $x\in G$, ולכן
אם $\Psi\in L^2(\hat{G})$ ומתקיים

$$\int_{\hat{G}} \phi\overline{\Psi}\,d\gamma = 0 \qquad \forall\phi\in\Phi$$

אז גם

$$\int_{\hat G} \phi(\gamma)\overline{\Psi(\gamma)}\,(x,\gamma)\,d\gamma = 0 \qquad (\phi\in\Phi,\ x\in G)$$

וכיוון ש- $\phi\bar\Psi \in L^1(\hat G)$ משפט היחידות אומר ש- $\phi\bar\Psi = 0$ כמעט בכל מקום לכל $\phi\in\Phi$.

אך כבר ראינו שאפשר למצוא $f\in C_c(G)\cap P(G)$ כך ש- $\hat f>0$ על נקודה ומסביבה, ולכן, $\Psi=0$ כמעט בכל מקום. מכאן שהתמונה של Φ צפופה ב- $L^2(\hat G)$.

$\square$

<u>משפט:</u> $\{f_1*f_2 \mid f_1,f_2\in L^2(\hat G)\} = \mathcal{F}(L^1(G))$.

<u>הוכחה:</u> מהנוסחא $\|f\|_2=\|\hat f\|_2$ אפשר להסיק שוויון לגבי המכפלה הפנימית של שתי פונקציות:

$$(\cdot)\qquad \int_G f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\hat G}\hat f(\gamma)\overline{\hat g(\gamma)}\,d\gamma$$

(ע"י התהליך הסטנדרטי של 'פולריזציה' = הבעת המכפלה $\langle\,,\rangle$ ע"י הנורמה $\|\cdot\|$)

נחליף ב- $(\cdot)$ את g ב- $\bar g$:

$$(\cdot\cdot)\qquad \int_G f(x)g(x)\,dx = \int_{\hat G}\hat f(\gamma)\,\hat g(-\gamma)\,d\gamma$$

כי $\hat{\bar g}=\hat g^*$

ואם נחליף את $g(x)$ ב- $(-x,\gamma_0)\cdot g(x)$ ב- $(\cdot\cdot)$ נקבל

$$(\because)\qquad \int_G f(x)g(x)(-x,\gamma_0)\,dx = \int_{\hat G}\hat f(\gamma)\,\hat g(\gamma_0-\gamma)\,d\gamma = (\hat f*\hat g)(\gamma_0)$$

כי $\widehat{(x,\gamma_0)g(x)} = \hat g(\gamma-\gamma_0)$

עכשיו, כל $h\in L^1(G)$ הוא מכפלה של $f=hg$, $h,g\in L^2(G)$, ולכן, מ- $(\because)$ נובע ש- $\hat h=\hat f*\hat g$ כאשר $\hat f,\hat g\in L^2(\hat G)$, כמשפט פלנשרל.

מצד שני, מ- $(\because)$, אפשר להתחיל מ- $\hat f,\hat g\in L^2(\hat G)$ ולקבל $\hat f*\hat g\in \mathcal{F}(L^1(G))$. $\square$