הרצאה 18

דואליות פונטריגין

משפט: אם G חבורה אבלית קומפקטית מקומית אז $G \simeq \hat{\hat{G}}$ (כחבורות טופולוגיות).

הוכחה: נראה שההעתקה הטבעית $\alpha: G \to \hat{\hat{G}}$ המוגדרת ע"י

$$x \mapsto \alpha(x), \quad \alpha(x)(\gamma) = \gamma(x)$$

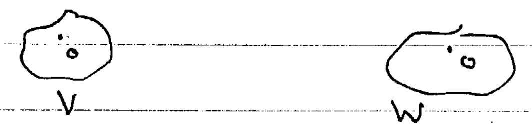
היא איזומורפיזם של חבורות טופולוגיות.

(1) α היא הומומורפיזם (ברור) ושיכון כי $\hat{G}$ מפרידה נקודות ב- G, כלומר, אם $x_1 \neq x_2$ אז יש $\gamma \in \hat{G}$ כך ש- $\gamma(x_1) \neq \gamma(x_2)$ ולכן $\alpha(x_1)(\gamma) \neq \alpha(x_2)(\gamma)$.

(2) α הומיאומורפיזם על תמונתה.

תהא $C \subseteq \hat{G}$ קומפקטית ויהי $r>0$. נסמן

$\alpha : G \longrightarrow \hat{\hat{G}}$



$$V = \{ x \in G \mid |1-(x,\gamma)| < r \quad \forall \gamma \in C \} \subseteq G$$

$$W = \{ \theta \in \hat{\hat{G}} \mid |1-(\gamma,\theta)| < r \quad \forall \gamma \in C \} \subseteq \hat{\hat{G}}$$

הקבוצות $V(C,r)$ ו- $W(C,r)$ מהוות בסיס לטופולוגיה של G ו- $\hat{\hat{G}}$ בהתאמה סביב 0. (את V הוכחנו ואת W זהו תרגיל).

מהגדרת α נקבל: $\alpha(V) = W \cap \alpha(G)$. לכן α ו- α^{-1} רציפות ב- 0, וכיוון ש- α איזומורפיזם, α ו- α^{-1} רציפות בכל נקודה של G ו- $\alpha(G)$.

בפרט $\alpha(G)$ קומפקטית מקומית.

(3) $\alpha(G)$ סגורה ב-G. נובע מהלמה הבאה.

למה: תהא G חבורה אבלית קומפקטית מקומית ו- $H \le G$ ת"ח. אם H קומפקטית מקומית בטופולוגיה היחסית אז H סגורה.

הוכחה: כיוון ש-H קומפקטית מקומית בטופולוגיה היחסית, קיימת סביבה U של 0 ב-G כך שהסגור של $U \cap H$ ב-H, שנסמנו K, קומפקטי ב-H. מכאן K גם קומפקטית ב-G כי אם $\bigcup V_\alpha$ כיסוי פתוח ב-G של K, אז $\bigcup H \cap V_\alpha$ כיסוי פתוח של K ב-H, ולכן יש לו תת כיסוי סופי $\bigcup_{i=1}^{n} (H \cap V_{\alpha_i})$, ולכן $\bigcup V_{\alpha_i}$ כיסוי סופי של K ב-G. לכן K סגורה ב-G.

נניח ש- $x \in \bar{H}$. תהא $\{x_\alpha\}$ רשת ב-H המתכנסת ל-x.

תהא V סביבה של 0 ב-G שהיא סימטרית ומקיימת $V+V \subseteq U$.

$-x \in \bar{H}$ (כי $\bar{H}$ ת"ח) ולכן $(V-x) \cap H \neq \emptyset$ ונבחר $y \in (V-x) \cap H$.

כיוון ש- $x_\alpha \to x$, קיים α כך שלכל $\beta > \alpha$ $x_\beta \in x+V$, ולכן $y+x_\alpha \in (V+x)+(V-x)$ כלומר $y+x_\alpha \in U$, וכיוון ש- $y+x_\alpha \in H$ נובע $y+x \in K \subseteq H$. בפרט $x = -y+(y+x) \in H$ □

(ד) $\alpha(G)$ צפופה ב- $\hat{\hat{G}}$.

נניח שלא. אז קיימת פונקציה רציפה $f \in C_0(\hat{\hat{G}})$ כך ש- $f|_{\alpha(G)} \equiv 0$ אבל $f \not\equiv 0$. כיוון ש-$F(L^1(\hat{G}))$ צפופה ב- $C_0(\hat{\hat{G}})$ אפשר להניח ש- $f \in F(L^1(\hat{G}))$ ולכן, יש $\phi \in L^1(\hat{G})$ כך ש-

$$f(\theta) = \int_{\hat{G}} \phi(\gamma)\,(-\gamma,\theta)\, d\gamma \qquad (\theta \in \hat{\hat{G}})$$

וכיוון שלכל $x \in G$ מתקיים

$$\int_{\hat{G}} \phi(\gamma)(-x,\gamma)\,d\gamma = \int_{\hat{G}} \phi(\gamma)(-\gamma, \alpha(x))\, d\gamma = 0$$

נובע ש- $\phi = 0$ ולכן $f \equiv 0$, סתירה □

שימושים

(1) פיזיקה: משוואת החום, אנליזה הרמונית על המעגל. $\mathbb{T}\cong\hat{\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z}\cong\hat{\mathbb{T}}$

$$f\in L^1(\mathbb{T}) \rightsquigarrow \hat{f}(n)=\int_{\mathbb{T}} f(z)\,z^{-n}\,dz=\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\,e^{-in\theta}\,\frac{d\theta}{2\pi}$$

$$\begin{array}{c} \hat{f}(n) \\ \updownarrow \\ n\in\mathbb{Z} \\ \updownarrow \\ \chi_n:\mathbb{T}\to\mathbb{T} \\ z\mapsto z^n \end{array}$$

ומקיים, למשל

$$\widehat{z^m f(z)}\,(n)=\widehat{f(z)}\,(n-m)$$

$$f\in \ell^1(\mathbb{Z}) \rightsquigarrow \hat{f}(z)=\int_{\mathbb{Z}} f(n)\,z^{-n}\,d\mu_{\mathbb{Z}}(n)=\sum_{-\infty}^{\infty} f(n)\,e^{-in\theta}$$

$$(z=e^{i\theta})$$

פתרונות למשוואות הנ"ל...

(2) תורת המספרים - אנליזה הרמונית על שדות מספרים. $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}}$

פונ' ζ של רימן המנורמלת

$$\tilde{\zeta}(s)=\Gamma(s/2)\,\pi^{-s/2}\prod_{p\ \text{ראשוני}}\frac{1}{1-p^{-s}}$$

מקיימת $\tilde{\zeta}(s)=\tilde{\zeta}(1-s)$.

טענה: נסמן $\mathbb{Q}_p$ הp-אדים לכל p ראשוני, $\mathbb{R}:=\mathbb{Q}_\infty$.

אז

$$\zeta_p(s)=\begin{cases}\Gamma(s/2)\pi^{-s/2} & p=\infty\\ \dfrac{1}{1-p^{-s}} & p\ \text{ראשוני}\end{cases}$$

ונגדיר

$$\phi_p=\begin{cases}e^{-\pi x^2} & p=\infty\\ \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p} & p\ \text{ראשוני}\end{cases}$$

אז $\qquad \zeta_p(s) = \int_{\mathbb{Q}_p^\times} \phi_p(x)\, |x|_p^s \, d\mu^\times_{\mathbb{Q}_p} \qquad \forall p \leq \infty$

$\mathbb{Q}_p^\times$: החבורה הכפלית

$|x|_p^s$: קרקטר של החבורה הכפלית

$d\mu^\times_{\mathbb{Q}_p}$: מידת האר של $\mathbb{Q}_p^\times$.

(בתרגול ניתנה הוכחה ש- $\mathcal{F}\phi_p = \phi_p$ $\forall p$ עבור טרנספורם פורייה האדיטיבי).

<u>הוכחה:</u>

<u>$p=\infty$</u>

$$\int_{\mathbb{R}^\times} e^{-\pi x^2} |x|^s \frac{dx}{|x|}$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-\pi x^2} x^{s-1} \frac{dx}{x}$$

$y=\pi x^2$, $dy = 2\pi x\, dx$

$$\rightarrow = 2\int_0^\infty e^{-y} \left(\frac{y}{\pi}\right)^{\frac{s-1}{2}} \frac{1}{2} \frac{dy}{y}$$

$$= \pi^{-s/2}\int_0^\infty e^{-y} y^{s/2-1}\, dy = \pi^{-s/2}\,\Gamma(s/2).$$

<u>$p<\infty$</u>

$$\int_{\mathbb{Q}_p^\times} \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p} |x|_p^s \, d\mu^\times_{\mathbb{Q}_p} = \int_{\mathbb{Z}_p} |x|_p^s \, d\mu^\times_{\mathbb{Q}_p}$$

ננרמל את המידה הכפלית כך ש- $\mu(\mathbb{Z}_p^\times)=1$

$$\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p^\times \amalg p\mathbb{Z}_p^\times \amalg \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^\infty p^{-ks} = \frac{1}{1-p^{-s}}$$

$\square$

האדלים:

$$\mathbb{A}_\mathbb{Q} = \prod_{p\le\infty}{}' \mathbb{Q}_p$$

כאשר $\prod'$ מציין שכמעט לכל p (=פרט למספר סופי של ראשוניים) מתקיים $x_p \in \mathbb{Z}_p$ אם $(x_p)_{p\le\infty} \in \mathbb{A}_\mathbb{Q}$.

• על $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ חבורה טופולוגית קומפקטית מקומית.

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{A}_\mathbb{Q}$$
$$r \longmapsto (r, r, \dots)$$

כיוון שלכל מספר רציונלי יש מספר סופי של 'בעייתיים' = ראשוניים במכנה, אכן $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{A}_\mathbb{Q}$.

• $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ דומה לזו, וכן:

דיסקרטי. קומפקטי.

$$0 \to \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{A}_\mathbb{Q} \to \mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q} \to 0$$

$$\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{A}_\mathbb{Q}/\mathbb{Q}$$

• השערת לנגלנדס עוסקת בקשר בין:

$$\{\rho : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to GL_n(\mathbb{C})\} \longleftrightarrow \{\rho : GL_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \to \mathrm{Aut}(V)\}$$