נוסחת ההטלה ומסקנותיה.

בהינתן הצגה (ρ,V) של G נסמן $V^G=\{v\in V \mid \rho(g)v=v, \forall g\in G\}$

זהו המרכיב האיזוטיפי של ההצגה הטריוויאלית של G ב-V.

נסמן

$$\varphi=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\ \in End(V)$$

טענה: φ היא G-העתקה והיא ההטלה של V על V^G.

הוכחה: נראה שזו G העתקה, כלומר: $\rho(h)\varphi=\varphi\rho(h)$ $\forall h\in G$. אכן,

$$\rho(h)\cdot\varphi=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(h)\rho(g)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(h)\rho(g)\underbrace{\rho(h^{-1})\rho(h)}_{I}$$

$$=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(hgh^{-1})\rho(h)=\varphi\cdot\rho(h)$$

$Im\varphi\subseteq V^G$: אם $v=\varphi(w)=\sum_{g\in G}\rho(g)w$ אז לכל $h\in G$ מתקיים

$$\rho(h)v=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(h)\rho(g)w=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)w=v$$

$V^G\subseteq Im\varphi$: אם $\rho(h)v=v$ לכל $h\in G$ אז $\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\rho(h)v=v$

ולכן $\varphi(v)=v$, כלומר $V^G\subseteq Im\varphi$.

מאותם שיקולים גם ברור שמתקיים $\varphi^2=\varphi$ $\square$

נסמן ב-m את הריבוי של ההצגה הטריוויאלית ב-V. אז

$$m=\dim V^G=tr(\varphi)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}tr(\rho(g))=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)$$

בפרט: לכל הצגה אי-פריקה של V השונה מההצגה הטריוויאלית

סכום ערכי הקרקטר של V על כל איברי g הוא 0.

כעת, נניח ש- V ו- W הצגות של G, ונביט על $Hom(V,W)$ כהצגה כפי שהגדרנו בהרצאה הקודמת. נבחין בין שני אובייקטים:

$$Hom(V,W)^G = \text{ המרכיב של ההצגה הטריוויאלית בהצגה } Hom(V,W)$$

$$\begin{aligned} Hom_G(V,W) &= \{\text{מרחב ה- } G \text{ העתקות בין } V \text{ ו- } W\} \\ &= \{T: V \to W \mid T\rho_V(g) = \rho_W(g)T \ \ \forall g \in G\} \end{aligned}$$

<u>למה:</u> $Hom_G(V,W) = Hom(V,W)^G$.

<u>הוכחה:</u> נובע ישירות מההגדרות, כי

$$\begin{aligned} T \in Hom_G(V,W) &\iff T\rho_V(g) = \rho_W(g)T \quad \forall g \in G \\ &\iff T\rho_V(g^{-1})(v) = \rho_W(g)^{-1}T(v) \quad \forall g \in G \ \forall v \in V \\ &\iff \rho_W(g)\left(T\left(\rho_V(g)^{-1}v\right)\right) = T(v) \\ &\iff \left(\rho_{Hom(V,W)}(g)\, T\right)(v) = T(v) \\ &\iff \rho_{Hom(V,W)}(g)\, T = T \\ &\iff T \in Hom(V,W)^G \end{aligned}$$

$\square$

נזכר בלמה של Schur:

$$\dim Hom_G(V,W) = \begin{cases} 1 & V \cong W \\ 0 & V \not\cong W \end{cases}$$

עבור V, W אי פריקות.

בנוסף, מתקיים

$$(*) \quad \chi_{Hom(V,W)}(g) = \chi_{V^* \otimes W}(g) = \overline{\chi_V(g)}\, \chi_W(g)$$

נסמן: $\mathbb{C}_{class}(G) = \{$ פונקציות מחלקה של $G \}$
$$= \{ f : G \to \mathbb{C} \mid f(ghg^{-1}) = f(h) \ \forall g,h \in G \}$$

ועל $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_{class}(G)$ נגדיר מ"פ:
$$(\alpha, \beta) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \overline{\beta(g)}$$

<u>משפט</u>: הקרקטרים של הצגות אי-פריקות הם אורתונורמליים.

<u>הוכחה</u>:
$$(\chi_W, \chi_V) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g) \qquad \text{(מההגדרה)}$$
$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{Hom(V,W)}(g) \qquad \text{(מ-(*))}$$
$$= \dim Hom(V,W)^G$$
$$= \dim Hom_G(V,W) = \begin{cases} 1 & V \cong W \\ 0 & V \not\cong W \end{cases}$$

מהלמה של Schur

□

<u>מסקנה 1</u>: כל הצגה נקבעת ע"י הקרקטר שלה.

<u>הוכחה</u>: להצגות אי-פריקות זה נובע ישירות מהמשפט. להצגה כללית V, אם
$$V \cong V_1^{a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{a_k} \qquad (V_i \text{ אי פריקות שונות})$$
אז
$$\chi_V = a_1 \chi_{V_1} + \cdots + a_k \chi_{V_k}$$
וכיוון שהקרקטרים בה"ל המקדמים נקבעים ביחידות: $a_i = (\chi_V, \chi_{V_i})$ □

<u>מסקנה 2</u>: מספר מחלקות הצמידות $\geq$ מספר ההצגות האי-פריקות השונות.
בפרט, ל-G יש מספר סופי של הצגות אי פריקות שונות.

<u>הוכחה</u>: להצגות שונות קרקטרים שונים ולכן הם בת"ל במרחב ממימד סופי - מספרם סופי. □

<u>הגדרה</u>: ההצגה הרגולרית של G היא ההצגה המתקבלת מפעולת G על עצמה ע"י כפל (משמאל). כלומר, אם

$$R = \{ f : G \to \mathbb{C} \}$$

אז $\forall g \in G \quad r(g): R \to R$, $(r(g) \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x)$

הפעולה על מרחב ההצגה.

כפל בחבורה

נשים לב ש- $\dim_{\mathbb{C}} R = |G|$.

מהו הקרקטר של ההצגה הרגולרית?

נבחר בסיס ל- R, פונקציות דלתא המתאימות באברי G:

$$\delta_g(x) = \begin{cases} 1 & g = x \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

אז, לכל $h \in G$ מתקיים $r(h)\delta_g = \delta_{hg}$. בפרט, קל לראות שבבסיס זה חישוב הקרקטר נותן:

$$\chi_R(h) = \begin{cases} |G| & h = e \\ 0 & h \neq e \end{cases}$$

<u>מסקנה 3</u>: <u>כל</u> הצגה אי-פריקה של G מופיעה בהצגה הרגולרית עם ריבוי השווה למימד שלה.

<u>הוכחה</u>: תהא W הצגה אי-פריקה כלשהי של G. אז הריבוי שלה a_W ב- R נתון ע"י:

$$\begin{aligned} a_W &= (\chi_W, \chi_R) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_W(g) \overline{\chi_R(g)} \\ &= \frac{1}{|G|} \chi_W(e) \cdot |G| = \chi_W(e) = \dim W \end{aligned}$$

בפרט, הוכחנו $|G| = \sum_{W \text{ אי-פריקה}} (\dim W)^2$. □

נוכיח כעת שהאי-שוויון במסקנה 2 הוא למעשה שוויון.
נתחיל מאיפיון של פונקציות מחלקה.

<u>טענה</u>: תהא $\alpha: G \to \mathbb{C}$ פונקציה כלשהי. לכל הצגה (ρ, V) של G נסמן

$$\varphi_{\alpha,V} = \sum_{g\in G} \alpha(g)\rho(g) \in \mathrm{End}(V)$$

אז α היא פונקציית מחלקה $\iff$ $\varphi_{\alpha,V} \in \mathrm{End}_G(V)$, לכל הצגה V.

<u>הוכחה</u>:

$\boxed{\Leftarrow}$ נניח ש-α פונקציית מחלקה. אז לכל $h \in G$

$$\underline{\varphi_{\alpha,V}\cdot\rho(h)} = \sum_{g\in G}\alpha(g)\rho(g)\rho(h)$$

$$= \sum_{g\in G}\alpha(hgh^{-1})\rho(hgh^{-1})\rho(h)$$

$$= \rho(h)\sum_{g\in G}\alpha(hgh^{-1})\rho(g) \underset{\text{כי } \alpha \text{ פונקציית מחלקה}}{=} \rho(h)\sum_{g\in G}\alpha(g)\rho(g)$$

$$= \underline{\rho(h)\cdot\varphi_{\alpha,V}}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ תרגיל. □

<u>מסקנה 4</u>: מספר ההצגות האי-פריקות השונות של G שווה בדיוק למספר מחלקות הצמידות.

<u>הוכחה</u>: נראה שאם $\alpha \in \mathbb{C}_{class}(G)$ ו- $(\alpha, \chi_V)=0$ לכל הצגה אי פריקה אז $\alpha=0$ (כלומר הקרקטרים של ההצגות האי פריקות הם קבוצה פורשת (ובת"ל)).

אכן, אם V אי-פריקה אז מהטענה הקודמת + הלמה של Schur נובע ש-

$$\varphi_{\alpha,V} = \lambda I \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

אם $n=\dim V$, נקבל:

$$\lambda\cdot n = tr(\lambda I) = tr(\varphi_{\alpha,V}) = \sum_{g\in G}\alpha(g)\chi_V(g) = |G|\cdot(\alpha,\chi_{V^*}) = 0$$

(עפ"י ההנחה). לכן $\lambda=0$. כלומר, $\varphi_{\alpha,V}$ פועל כמו אופרטור האפס בכל הצגה אי פריקה, ולמכאן גם בכל הצגה. בפרט בפעולתו על ההצגה הרגולרית:

$$\left(\sum_{g\in G}\alpha(g)\, r(g)\right)\delta_h = \sum_{g\in G}\alpha(g)\,\delta_{gh} = 0$$

אבל, $\{\delta_g\}$ הם בסיס ולכן $\alpha(g)=0 \quad \forall g\in G$ $\square$