הרצאה 6

חוג החבורה: הצגות של G ו-$\mathbb{C}[G]$-מודולים.

תהא G חבורה סופית. נסמן ב- $\mathbb{C}[G]$ את המרחב הוקטורי מעל $\mathbb{C}$ עם בסיס $\{\delta_g \mid g \in G\}$, כלומר

$$\mathbb{C}[G] = \left\{ \sum_{g\in G} a_g \delta_g \;\middle|\; a_g \in \mathbb{C} \right\}$$

החיבור ב- $\mathbb{C}[G]$ לפי קואורדינטות:

$$\left(\sum_{g\in G} a_g \delta_g\right) + \left(\sum_{g\in G} b_g \delta_g\right) = \sum_{g\in G} (a_g + b_g)\delta_g$$

(עניין ה- $\mathbb{C}[G]$ מבנה של חוג (למעשה, אלגברה מעל $\mathbb{C}$): $\delta_g \cdot \delta_h := \delta_{gh}$ על איברי הבסיס עם הרחבה לינארית:

$$\left(\sum_{g\in G} a_g \delta_g\right)\left(\sum_{h\in G} b_h \delta_h\right) = \sum_{g,h\in G} a_g b_h \delta_{gh}$$

$$= \sum_{k\in G}\left(\sum_{h\in G} a_{kh^{-1}} b_h\right)\delta_k$$

<u>הערה</u>: אם נזהה בין $\mathbb{C}[G]$ למרחב הפונקציות על G, איברי הבסיס δ_g יתאימו לפונקציות דלתא המתמקדות באיברי G, איבר כללי $\sum a_g \delta_g$ יתאים כמובן לפונקציה $a: g \mapsto a_g$ נקבל את מבנה הכפל הידוע בשם קונבולוציה

$$(a * b)(g) = \sum_{h\in G} a(gh^{-1})\, b(h)$$

$$= \sum_{h\in G} a(h)\, b(h^{-1}g)$$

הצגות של G ו- $\mathbb{C}[G]$ מודולים

אם (ρ, V) הצגה של G נגדיר, לכל $f \in \mathbb{C}[G] = \sum_g f_g \delta_g$

$$\tilde{\rho}(f)\, v = \tilde{\rho}\left(\sum_{g\in G} f_g \delta_g\right) v = \sum f_g \cdot \rho(g)\, v$$

כלומר, $\tilde{\rho}(f) \in End(V)$. הגדרה זו מעניקה לכל הצגה של G מבנה של $\mathbb{C}[G]$-מודול.

בכיוון ההפוך, אם V הוא $\mathbb{C}[G]$-מודול: $\psi: \mathbb{C}[G] \longrightarrow End(V)$,
אז V הוא גם הצגה של G, בסימון ע"י צמצום לאיברי הבסיס:

$$\Psi(g) := \psi(\delta_g) \in Aut(V) \quad \forall g\in G$$

טענה: ההתאמות $\rho \mapsto \tilde{\rho}$ ו- $\psi \mapsto \Psi$ הן הפוכות זו לזו ומגדירות איזומורפיזם בין הקטגוריה של ההצגות של G לקטגוריה של $\mathbb{C}[G]$-מודולים.

מכפלה טנזורית של מודולים

אם R ו- S חוגים, ${}_SM_R$ - בי-מודול (שמאלי מעל S וימני מעל R)
ו- ${}_RN$ R-מודול (שמאלי) נגדיר את

$${}_SM_R \otimes_R N$$

כפי שהגדרנו מכפלה טנזורית של מרחבים וקטוריים. יהי $\mathbb{Z}[M\times N]$ המודול החופשי מעל $\mathbb{Z}$ עם בסיס $\{\delta_{(m,n)} \mid m\in M, n\in N\}$. יהי K תת המודול הנוצר ע"י

$$\{\delta_{(rm,n)}-\delta_{(m,rn)},\ \delta_{(m_1+m_2,n)}-\delta_{(m_1,n)}-\delta_{(m_2,n)},\ \delta_{(m,n_1+n_2)}-\delta_{(m,n_1)}-\delta_{(m,n_2)}\}$$

ונגדיר: $M\otimes_R N := \mathbb{Z}[M\times N]/K$, $m\otimes n := \delta_{(m,n)}+K$.
ל- $M\otimes_R N$ יש מבנה של S-מודול ע"י: $s(m\otimes n) = sm\otimes n$.

מתקיים: אם ${}_RN$, ${}_SM_R$, ${}_TL_S$ מודולים, R,S,T חוגים

$$(L\otimes_S M)\otimes_R N \cong L\otimes_S (M\otimes_R N)$$

כ- T-מודולים. (הוכחה: תרגיל).

תיאור ההצגה המושרית באמצעות מכפלה טנזורית

נניח $H<G$. תהא V הצגה של H. מההתאמה בין הצגות למודולים V הוא מודול (שמאלי) מעל $\mathbb{C}H$. נביט ב- $\mathbb{C}G$ כ- $\mathbb{C}G-\mathbb{C}H$ בימודול. המכפלה הטנזורית

$$\mathbb{C}G\otimes_{\mathbb{C}H} V$$

נותנת $\mathbb{C}G$-מודול שהוא הצגה של G היא בדיוק ההצגה המושרית $\mathrm{Ind}_H^G V$.

נשים לב שכמרחבים וקטוריים:

$$\mathbb{C}G\otimes_{\mathbb{C}H} V=\bigoplus_{t\in T}\mathbb{C}g\otimes V\simeq V^{[G:H]}$$

נציגים למחלקות G/H

כלומר, $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}G\otimes_{\mathbb{C}H}V=[G:H]\dim V$.

<u>מסקנה:</u> אם $K<H<G$ אז $\mathrm{Ind}_H^G\,\mathrm{Ind}_K^H V\cong\mathrm{Ind}_K^G V$ לכל V הצגה של K.

<u>הוכחה:</u> נובע מאסוציאטיביות המכפלה הטנזורית.

<u>הגדרה:</u> אלגברה A נקראת פשוטה למחצה אם כל מודול שלה מתפרק לסכום ישר של מודולים אי-פריקים.

כיון שכל הצגה של G מתפרקת לסכום ישר של הצגות אי-פריקות, כל $\mathbb{C}G$-מודול מתפרק לסכום ישר של מודולים אי-פריקים ולכן $\mathbb{C}G$ היא אלגברה פשוטה למחצה.

<u>משפט (Wedderburn):</u> אם A אלגברה פשוטה למחצה מעל שדה k ממימד סופי אז

$$A\cong\bigoplus_i M_{n_i}(D_i)$$

כאשר D_i אלגבראות חילוק מעל k.

לא נוכיח משפט זה בקורס הזה. אלא רק את המסקנה שלו עבור $\mathbb{C}G$:

<u>מסקנה</u>:

$$\mathbb{C}G \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(\mathbb{C})$$

כאשר k הוא מספר ההצגות האי-פריקות השונות של G ו-n_i הם המימדים המתאימים.

<u>הוכחה</u>: אם (ρ_i, W_i) $i=1,\dots,k$ ההצגות האי פריקות, נגדיר

$$\mathbb{C}G \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{End}(W_i)$$

$$f \longmapsto (\tilde{\rho}_1(f), \dots, \tilde{\rho}_k(f))$$

ברור שזה הומומורפיזם של אלגבראות. כיוון שהמימדים (מעל $\mathbb{C}$) בשני הצדדים הם $|G|$ מספיק להראות שההעתקה היא חח"ע. אכן, מצד ימין כתובה <u>ההצגה הרגולרית</u> של G (נניח שההעתקה $\tilde{\rho}_i(f)$ היא העתקת האפס לכל i כלומר ש- f, בפעולתה על ההצגה הרגולרית של G, פועלת כמו אפס:

$$\forall h \in G, \quad \Big(\sum_{g\in G} f_g \delta_g\Big)\cdot \delta_h = 0$$

אבל זה יתכן רק כאשר $f \equiv 0$. $\square$

ההעתקה $f \mapsto (\tilde{\rho}_1(f), \dots, \tilde{\rho}_k(f))$ נקראת <u>טרנספורם פוריה</u> של f, נשוב אליה בהמשך.

<u>המרכז של $\mathbb{C}G$</u>

- נשים לב שהמרכז של אלגברת המטריצות $M_n(\mathbb{C})$ כולל בדיוק את המטריצות הסקלריות λI $(\lambda \in \mathbb{C})$.
- מכאן המרכז של אלגברת החבורה יהיה המרחב <u>הנפרש</u> ע"י $e_i = (0,\dots,I_{n_i},0,\dots,0)$ [שמטריצת יחידה בקואורדינטה ה-i של צד ימין באיזומורפיזם לעיל].

לכן, מתקיים $e_i^2 = e_i$ (אידמפוטנטים מינימליים באלגברה)

- מצד שני, האיברים מהצורה $\sum_{g\in G} f(g)\delta_g$ כאשר f פונקצית מחלקה גם הם מרכזיים. לכן, בסיס אחר למרכז של $\mathbb{C}G$ הוא

$$\Big\{ e_C := \sum_{g\in G} \delta_g \;\Big|\; C \text{ מחלקת צמידות} \Big\}$$

כיוון ש- e_i הוא ההטלה על ההצגה $W_i^{\dim W_i}$ (המרכיב האיזוטיפי של W_i)
בהצגה הרגולרית, יש לנו עבורם נוסחה מפורשת באמצעות הקרקטרים:

$$e_i = \frac{\dim W_i}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_{W_i}(g)}\, g$$

(זו בדיוק הנוסחה שהשתמשנו בתרגיל בית).

תכונות אריתמטיות של קרקטרים

הגדרה: יהי $\mathbb{Z}\subseteq R$ חוג. איבר $\alpha\in R$ נקרא **שלם אלגברי** אם קיים פולינום מתוקן $f\in\mathbb{Z}[x]$ כך ש- $f(\alpha)=0$.

למה: אם $\alpha\in\mathbb{Q}$ שלם אלגברי אז $\alpha\in\mathbb{Z}$.
הוכחה: אם $\alpha=p/q$ שבר מצומצם אז $0=(\frac{p}{q})^n+a_{n-1}(\frac{p}{q})^{n-1}+\dots+a_0$
(נקבל ש- $p^n\equiv 0 \pmod q$, סתירה לכך ש- p ו- q זרים, אלא אם כן $q=1$. □

טענה: יהי $\mathbb{Z}\subseteq R$ חוג קומוטטיבי ו- $\alpha\in R$. התנאים הבאים שקולים:
(1) α שלם מעל $\mathbb{Z}$.
(2) $\mathbb{Z}[\alpha]$ הוא תת-$\mathbb{Z}$ מודול של R נוצר סופית.
(3) קיים ב- R תת-$\mathbb{Z}$-מודול M נוצר סופית המכיל את $\mathbb{Z}[\alpha]$.
הוכחה: $(1)\Rightarrow(2)$: אם α שלם אז $\alpha^n\in \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{1,\alpha,\dots,\alpha^{n-1}\}$ ולכן $\mathbb{Z}[\alpha]$
נוצר (כמודול) ע"י $1,\alpha,\dots,\alpha^{n-1}$ ו- (2) מתקיים.
$(2)\Rightarrow(3)$ ברור. $(3)\Rightarrow(1)$ תרגיל. □

מסקנה: אם R הוא $\mathbb{Z}$-מודול נוצר סופית אז כל איבר ב- R הוא
שלם אלגברי.
מסקנה: לכל $\mathbb{Z}\subseteq R$, השלמים האלגבריים ב- R הם תת-חוג של R.
הוכחה: אם α ו- β שלמים, אז $\mathbb{Z}[\alpha]$ ו- $\mathbb{Z}[\beta]$ הם

$\mathbb{Z}$ מודולים נוצרים סופית, ולכן גם $\mathbb{Z}[\alpha,\beta] \cong \mathbb{Z}[\alpha]\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[\beta]$ נוצר סופית.
בפרט $\alpha+\beta$ ו- $\alpha\cdot\beta$ אלגבריים. □

משפט: המימד של הצגה אי-פריקה של G מחלק את $|G|$.

הוכחה: תהא (ρ,V) הצגה אי-פריקה של G, ותהא C מחלקת צמידות כלשהי ב- G. נסמן ב- e_C את האיבר המתאים ל- C בתוך החבורה: $e_C=\sum_{g\in C}\delta_g \in \mathbb{C}G$ ונשים לב ש- e_C במרכז של $\mathbb{C}G$.
האופרטור $\tilde{\rho}(e_C)$ הוא העתקה מ- V ל- V ולכן הוא כפל בסקלר
$\Leftarrow$ $[\tilde{\rho}(e_C)]=\lambda_C I$, ולכן: $\lambda_C\cdot\dim V = tr(\tilde{\rho}(e_C))=|C|\chi_V(C)$.
במשוואה זו: $\lambda_C, \dim V, |C|\in\mathbb{N}$ ו- $\chi_V(C)$ הם שלמים אלגבריים.(*)
עכשיו, מאורתונורמליות הקרקטרים $1=(\chi_V,\chi_V)$, נקבל

$$\sum_{C \text{ מחלקת צמידות}} |C|\,\overline{\chi_V(C)}\,\chi_V(C) = |G|$$

ולכן

$$\underbrace{\sum_{C} \lambda_C\cdot\overline{\chi_V(C)}}_{\text{שלם אלגברי}} = \underbrace{\frac{|G|}{\dim V}}_{\text{רציונלי}}$$

$$\Leftarrow \quad \frac{|G|}{\dim V}\in\mathbb{Z} \quad \square$$

הסבר ל-(*):
(·) $\chi_V(C)$ הוא שלם אלגברי כי הוא סכום של שורשי יחידה.
(··) λ_C הוא תמונה של e_C תחת הומומ' של חוגים ($\tilde{\rho}$), ולכן מספיק להראות ש- e_C שלם אלגברי לכל מחלקה C. אבל זה נכון כי לכל שתי מחלקות C_1 ו- C_2 המכפלה $e_{C_1}\cdot e_{C_2}$ היא צירוף לינארי עם מקדמים שלמים (למעשה, אי-שליליים) של $\{e_C \mid C \text{ מח' צמידות}\}$, כלומר החוג $\mathbb{Z}[e_{C_1},\dots,e_{C_k}]$ שווה למודול $\mathbb{Z}e_{C_1}+\dots+\mathbb{Z}e_{C_k}$, ובפרט נוצר סופית ולפי הטענה כל איבר בו הוא שלם אלגברי.