השראה וצמצום - תוצאות נוספות

סימון: אם G חבורה סופית, נסמן ב- $Rep(G)$ את הקטגוריה* של ההצגות המרוכבות של G ממימד סופי. העצמים בקטגוריה הם הצגות והמורפיזמים הם G-העתקות.

הצמצום $Res_H^G(\cdot)$ וההשראה $Ind_H^G(\cdot)$ מגדירים פונקטורים בין קטגוריות ההצגות של H ו- G:

$$Res_H^G : Rep(G) \longrightarrow Rep(H) \;,\quad V \mapsto Res_H^G(V)$$

$$Ind_H^G : Rep(H) \longrightarrow Rep(G) \;,\quad W \mapsto Ind_H^G(W)$$

• לגבי עצמים (= הצגות) הגדרנו את הפונקטור.

• לגבי מורפיזמים.

Res: אם $f: V_1 \to V_2$ היא G-העתקה בין הצגות של G אז היא בפרט H-העתקה ולכן $Res_H^G(f): Res_H^G(V_1) \to Res_H^G(V_2)$ היא פשוט ההעתקה f.

Ind: אם $f: W_1 \to W_2$ היא H-העתקה של הצגות-H נרצה להגדיר את $Ind_H^G(f): Ind_H^G(W_1) \to Ind_H^G(W_2)$. למעשה, כבר עשינו זאת רק שלא קראנו לזה בשמו:

$$\begin{tikzcd}
W_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "h_1"'] & W_2 \arrow[d, hook, "h_2"] \\
Ind_H^G(W_1) \arrow[r, dashed, "\exists! F"] & Ind_H^G(W_2)
\end{tikzcd}$$

נסמן ב- h_i את השיכון $W_i \hookrightarrow Ind_H^G(W_i)$ ($i=1,2$).

מלמה שהוכחנו בעבר נובע של- H-העתקה $h_2 \circ f$ קיימת הרחבה יחידה F שהיא G-העתקה. נגדיר אם כן $Ind_H^G(f) := F$.

(* מצורף נספח בנושא קטגוריות ופונקטורים)

למעשה, מקבלים עבורה למה את המשפט הבא.

<u>משפט</u> (<u>הדדיות Frobenius</u>): תהי G חבורה סופית ו- H תת-חבורה. אז לכל הצגה $W \in Rep(H)$ ולכל הצגה $V \in Rep(G)$ מתקיים

$$Hom_H(W, Res^G_H(V)) = Hom_G(Ind^G_H(W), V)$$

או ע"י שימוש בקרקטרים $(\chi_W, \chi_{Res^G_H(V)})_H = (\chi_{Ind^G_H(W)}, \chi_V)_G$.

<u>הערה</u>: אם $\mathcal{C}$ ו- $\mathcal{D}$ קטגוריות ו- $\alpha: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $\beta: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ פונקטורים המקיימים לכל $X \in ob(\mathcal{C})$ ולכל $Y \in ob(\mathcal{D})$

$$Hom_{\mathcal{C}}(X, \beta(Y)) = Hom_{\mathcal{D}}(\alpha(X), Y)$$

אז α ו- β נקראים <u>פונקטורים צמודים</u> (adjoints). לכן, Res^G_H ו- Ind^G_H הם פונקטורים צמודים.

<u>מסקנה</u>: אם W ו- V הצגות אי-פריקות אז הריבוי של W ב- $Res^G_H(V)$ הוא בדיוק הריבוי של V ב- $Ind^G_H(W)$.

<u>השראה וצמצום עם חבורות שונות</u>

נניח עכשיו ש- G חבורה סופית ונתונות שתי תת-חבורות של G: H ו- K. תהי (ρ, W) הצגה של H. בסעיף זה נחקור את ההצגה של K המתקבלת ע"י:

$$Res^G_K(Ind^G_H(W)) \qquad H \xrightarrow{ind} G \xrightarrow{res} K$$

שחקן מרכזי כאן יהיה אוסף המחלקות הכפולות

$$K\backslash G/H = \{KgH \mid g \in G\}$$

יהי S אוסף נציגים למחלקות אלו. $(S \subseteq G)$

לכל $s\in S$ נסמן

$$H_s := H\cap s^{-1}Ks < H$$
$$K_s := sHs^{-1}\cap K < K$$

H_s ו- K_s הן חבורות איזומורפיות

$$\begin{array}{ccc} H & & K \\ \vee & & \vee \\ s(\cdot)s^{-1}: H_s & \xrightarrow{\sim} & K_s \end{array}$$

לכל $s\in S$ נסמן ב- ρ^s את ההעתקה.

$$\rho^s(x) = \rho(sxs^{-1}) \quad \forall x\in K_s$$

קיבלנו הצגה $\rho^s: K_s\to Aut(W)$ שנסמנה (ρ^s, W_s). ההצגה ρ^s היא למעשה הצמצום של ρ מ- H ל- H_s מורכב עם האיזומורפיזם $H_s\simeq K_s$.

כיוון ש- K_s היא ת"ח של K אפשר להשרות הצגה זו ל- K: $Ind^K_{K_s}(\rho^s)$.

<u>טענה:</u>

$$Res^G_K\, Ind^G_H(W) \cong \bigoplus_{s\in S} Ind^K_{K_s}(W_s)$$

<u>הערה:</u> לטענה זו אפשר לחשוב כ"התחלפות" מסוימת של Ind ו- Res כיוון שאת צד ימין אפשר לכתוב כ:

$$\bigoplus_{s\in S} Ind^K_{K_s}\circ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{הצמדה} \\ \text{ב-} s}}{s} \circ Res^H_{H_s}(W)$$

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dr, squiggly, "res"] & \\ H \arrow[ur, squiggly, "ind"] \arrow[d, squiggly, "res"'] & & K \\ H_s \arrow[rr, "\sim"] & & K_s \arrow[u, squiggly, "ind"'] \end{tikzcd}$$

<u>הוכחה</u>: מהגדרת ההצגה המושרית $(\tilde{\rho}, Ind_H^G W)$ אנחנו יודעים כי:

$$V = Ind_H^G(W) = \bigoplus_{x\in G/H} \tilde{\rho}(x)W$$

נסמן
$$V(s) = \bigoplus_{x\in KsH/H} \tilde{\rho}(x)$$

אזי
$$V = \bigoplus_{s\in S} V(s)$$

מהבניה של $V(s)$, ברור שהוא אינוריאנטי תחת פעולת K, כלומר

$$\forall k\in K \qquad \tilde{\rho}(k)V(s) = V(s)$$

נשאר אם כן להראות ש- $V(s)\cong Ind_{K_s}^K(W_s)$ כ- K -הצגות (סיימנו).

ראשית, נבחן את המחוברים המופיעים ב- $V(s)$. הם סכום ישר של עותקים של W.
כמה עותקים? לשם כך יש לבדוק מתי $\tilde{\rho}(k_1)\tilde{\rho}(s)W = \tilde{\rho}(k_2)\tilde{\rho}(s)W$,
וזה קורה אם"ם $\tilde{\rho}(k_1^{-1}k_2 s)W = \tilde{\rho}(k_1^{-1}k_2)\tilde{\rho}(s)W = \tilde{\rho}(s)W$ כלומר
$k_1^{-1}k_2 sH = sH \iff k_1^{-1}k_2\in sHs^{-1}$. מכאן

$$V(s) = \bigoplus_{k\in K/K_s} \tilde{\rho}(k)\left(\tilde{\rho}(s)W\right) = Ind_{K_s}^K\left(\tilde{\rho}(s)W\right)$$

ונשאר רק לבדוק שכ- K_s -הצגות $\tilde{\rho}(s)W \cong W_s$. ואכן

$$\forall k\in K_s = K\cap sHs^{-1} \qquad \rho^s(k) = \rho(s^{-1}ks) = \tilde{\rho}(s)^{-1}\tilde{\rho}(k)\tilde{\rho}(s)$$

כלומר, $\tilde{\rho}$ ו- ρ^s איזומורפיות בהצגה של K_s. □

נספח

השלמות בנושא קטגוריות ופונקטורים

הגדרה: קטגוריה $\mathcal{C}$ מורכבת משלושה מרכיבים

(1) מחלקה של עצמים המסומנת $Ob(\mathcal{C})$.

(2) מחלקה של מורפיזמים המסומנת $Mor(\mathcal{C})$.

(3) פעולה בינארית = הרכבה של מורפיזמים "$\circ$".

כך ש: לכל שני עצמים X,Y אוסף המורפיזמים $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ הוא קבוצה.

- למורפיזמים $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ ו- $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ ההרכבה $g \circ f$ מוגדרת (שייכת ל- $Hom_{\mathcal{C}}(X,Z)$.
- מתקיימת אסוציאטיביות: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (כאשר הכל מוגדר)
- קיים איבר $1_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X,X)$ המקיים $1_X \circ f = f$ לכל $f \in Hom_{\mathcal{C}}(Y,X)$ וכן $g \circ 1_X = g$ לכל $g \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

דוגמאות

(1) $Vect_F$: הקטגוריה של מרחבים וקטוריים מעל שדה F.
העצמים = מרחבים וקטוריים, מורפיזמים = העתקות לינאריות, $\circ$ = הרכבה.

(2) Top: הקטגוריה של מרחבים טופולוגיים.
עצמים = מרחבים טופולוגיים, מורפיזמים = העתקות רציפות, $\circ$ = הרכבה.

(3) $Grps$: הקטגוריה של חבורות.
עצמים = חבורות, מורפיזמים = הומומורפיזמים של חבורות, $\circ$ = הרכבה.

תרגיל: בידקו שהתכונות של קטגוריה אכן מתקיימות.

הגדרה: תהיינה $\mathcal{C}$ ו- $\mathcal{D}$ קטגוריות. פונקטור מ- $\mathcal{C}$ ל- $\mathcal{D}$ הוא התאמה $F:\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ כך שלכל עצם X בקטגוריה $\mathcal{C}$ מתאים עצם $F(X)$ בקטגוריה $\mathcal{D}$, ולכל מורפיזם $f:X \to Y$ בקטגוריה $\mathcal{C}$ מתאים מורפיזם $F(f):F(X) \to F(Y)$ בקטגוריה $\mathcal{D}$ כך שמתקיים

(1) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ (2) $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

<u>הערה</u>: אם במקום (1) מתקיים $F(f\circ g)=F(g)\circ F(f)$ אומרים שהפונקטור קונטרה-וריאנטי.

<u>דוגמאות</u>

(1) הפונקטור "השוכח". תהא $Rep(G)$ הקטגוריה של הצגות מרוכבות של חבורה G. הפונקטור השוכח הוא הפונקטור המתאים לכל הצגה של G את מרחב ההצגה ושוכח את הפעולת G. מקבלים

$$F: Rep(G) \longrightarrow Vect_{\mathbb{C}}$$
$$(\rho, V) \longmapsto V$$

(2) תהא $Rep(G)$ קטגורית ההצגות של G ו- $Mod_{\mathbb{C}[G]}$ הקטגוריה של המודולים מעל חוג החבורה $\mathbb{C}[G]$. ראינו שכל הצגה של V היא גם $\mathbb{C}[G]$-מודול וכל G-העתקה היא העתקה של $\mathbb{C}[G]$ מודולים. קיבלנו אם כן פונקטור

$$F: Rep(G) \longrightarrow Mod_{\mathbb{C}[G]}$$
$$(\rho, G, V) \longrightarrow (\tilde{\rho}, \mathbb{C}[G], V)$$

(3) תהי Top הקטגוריה של מרחבים טופולוגיים.
תהי Alg_k הקטגוריה של אלגברות מעל שדה k.
נגדיר פונקטור קונטרה-וריאנטי $K: Top \to Alg_k$.
<u>עצמים</u>: לכל מרחב טופולוגי X תהא $K(X)$ אלגברת הפונקציות $f: X\to k$
(הכפל באלגברה הוא כפל נקודתי, היחידה באלגברה היא הפונקציה הקבועה $f\equiv 1$).
<u>מורפיזמים</u>: אם $\varphi: X\to Y$ העתקה רציפה (נגדיר) $K(\varphi): K(Y)\to K(X)$ ע"י
$f\mapsto f\circ\varphi$.

<u>תרגיל</u>: בדקו שזהו אכן פונקטור (קונטרה-וריאנטי).

(4) $\pi_1 : Top_* \to Grps$ המוגדר ע"י $(X,x_0)\mapsto \pi_1(X,x_0)$ (החבורה היסודית)
הוא הפונקטור המתאים לכל מרחב טופולוגי מנוקד את החבורה היסודית שלו.