הרצאה 8

אלגבראות ומודולי Hecke

אם V הצגה של G, אלגברת ה-G-העתקות $End_G(V) := Hom_G(V,V)$ נקראת "אלגברת Hecke של ההצגה". איבריה נקראים גם "אופרטורים משלבים" (intertwining operators).

אם W הצגה נוספת, אז מרחב ההעתקות $Hom_G(V,W)$ אינו מהווה אלגברה (כי הרכבה אינה מוגדרת) אבל זהו מודול ימני מעל $End_G(V)$ ומודול שמאלי מעל $End_G(W)$.

$$End_G(W) \circlearrowright Hom_G(V,W) \circlearrowleft End_G(V)$$

כאשר הפעולה היא הרכבה, למשל:

$$\forall \varphi \in End_G(V),\ \forall T \in Hom_G(V,W) \qquad \varphi \cdot T := T \circ \varphi$$

ובאופן דומה עבור $End_G(W)$.

מיד נראה שהמבנה של $End_G(V)$ קשור קשר הדוק לפירוק של V להצגות אי-פריקות ומכאן גם החשיבות של האלגברה הזו.

ראשית נבחין: הפונקטור $Hom_G(\cdot,\cdot)$ מתחלף עם סכומים ישרים (בשני הרכיבים) ואכן,

$$Hom_G(U, W_1 \oplus W_2) \cong Hom_G(U,W_1) \oplus Hom_G(U,W_2)$$

$$Hom_G(U_1 \oplus U_2, W) \cong Hom_G(U_1,W) \oplus Hom_G(U_2,W)$$

ובאינדוקציה:

$$Hom_G\left(\bigoplus_{i=1}^{n} U_i, \bigoplus_{j=1}^{m} W_j\right) = \bigoplus_{i,j} Hom_G(U_i, W_j)$$

<u>טענה:</u> אם $V \cong \bigoplus_{i=1}^{k} V_i^{a_i}$ ו- $W \cong \bigoplus_{i=1}^{k} V_i^{b_i}$ הצגות של G כאשר V_i הן הצגות אי פריקות שונות, אז:

$$Hom_G(V,W) \cong \bigoplus_{i=1}^{k} M_{b_i, a_i}(\mathbb{C})$$ (כמרחב וקטורי)

בפרט, $\mathrm{End}_G(V) \cong \bigoplus_{i=1}^{k} M_{a_i}(\mathbb{C})$.

<u>הוכחה:</u> נובעת ישירות מהדיון שקדם לטענה והעובדה ש- $\mathrm{Hom}(V_i,V_j)=\begin{cases}(0) & i\neq j\\ \mathbb{C} & i=j\end{cases}$ $\square$

<u>דוגמא:</u> אם V היא ההצגה הרגולרית של G ראינו: $\mathrm{End}_G(V)=\bigoplus_{i=1}^{k} M_{\dim V_i}(\mathbb{C})$.

הדיון עד עכשיו מהווה רקע אלגברי לנושא של אלגברת Hecke.
כאשר ההצגה מגיעה מפעולה של החבורה G על קבוצה X עם מבנה גיאומטרי/קומבינטורי, אפשר לנצל תכונות של המבנה על מנת לנתח את ההצגה.

<u>אספקטים גיאומטריים</u>

נניח ש- X ו- Y הן קבוצות סופיות ש- G פועלת עליהן.
נסמן ב- $\mathbb{C}(X)$ ו- $\mathbb{C}(Y)$ את ההצגות הפרמוטציה המתאימות, כלומר,

$$\mathbb{C}(X)=\{f:X\to\mathbb{C}\}, \qquad (g\cdot f)(x)=f(g^{-1}\cdot x)$$

נשים לב לאיזומורפיזם הבא:

$$(*) \qquad \mathbb{C}(Y\times X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(X),\mathbb{C}(Y))$$

$$\varphi \longmapsto T_\varphi, \qquad (T_\varphi f)(y)=\sum_{x\in X}\varphi(y,x)f(x)$$

זהו איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים (מטריצות $\leftrightarrow$ העתקות). אבל, שני המרחבים הם גם הצגות:

$$\forall g\in G \qquad \begin{aligned}(g\cdot\varphi)(y,x) &= \varphi(g^{-1}\cdot y, g^{-1}\cdot x) && \varphi\in\mathbb{C}(Y\times X)\\ (g\cdot T)f &= g(T(g^{-1}\cdot f)) && T\in\mathrm{Hom}(\mathbb{C}(X),\mathbb{C}(Y))\end{aligned}$$

טענה: האיזומורפיזם (*) הנו של G-הצגות.

הוכחה: יש להראות ש- $g\cdot T_\varphi = T_{g\cdot\varphi}$. אכן,

$$\Big((g\cdot T_\varphi) f\Big)(y) = g\cdot\Big(T_\varphi(g^{-1}\cdot f)\Big)(y)$$

$$= T_\varphi(g^{-1}\cdot f)(g^{-1}y)$$

$$= \sum_{x\in X}\varphi(g^{-1}y, x)\,(g^{-1}\cdot f)(x)$$

$$= \sum_{x\in X}\varphi(g^{-1}y, x)\, f(g\cdot x)$$

$$= \sum_{x\in X}\varphi(g^{-1}y, g^{-1}x)\, f(x) = \Big(T_{g\cdot\varphi} f\Big)(y)$$

$\square$

מסקנה: $$Hom_G\big(\mathbb{C}(X), \mathbb{C}(Y)\big) = \mathbb{C}(Y\times_G X)$$

הוכחה: ניקח את החלק ה-G-אינוריאנטי (ההצגה הטריויאלית) באיזומורפיזם (*):

$$Hom_G\big(\mathbb{C}(X), \mathbb{C}(Y)\big) = Hom\big(\mathbb{C}(X), \mathbb{C}(Y)\big)^G$$

$$= \mathbb{C}(Y\times X)^G$$

$$= \mathbb{C}(Y\times_G X)$$

כאשר $Y\times_G X$ = מרחב המסלולים של G ב-$Y\times X$. $\square$

בפרט, אם $\mathbb{C}(X)\simeq \bigoplus_{i=1}^k V_i^{a_i}$ כאשר V_i אי-פריקות שונות, מתקיים

$$\sum_{i=1}^k a_i^2 = |X\times_G X|$$

דוגמא: נסמן ב- X_m את תת-הקבוצות של $[n]=\{1,2,\dots,n\}$ מגודל m:

$$X_m = \binom{[n]}{m} = \{ x \subseteq [n] \mid |x| = m \}$$

הפעולה הטבעית של S_n על X_m טרנזיטיבית, ותהי $\mathbb{C}(X_m)$ ההצגה המתאימה.

נראה ש- $\mathbb{C}(X_m) = U_0 \oplus \cdots \oplus U_m$ כלומר, ההצגה מתפרקת לסכום ישר של $m+1$ הצגות אי פריקות שונות עם ריבוי 1.

$$End_{S_n}(\mathbb{C}(X_m)) = \mathbb{C}(X_m \times_{S_n} X_m)$$

מהם המסלולים של S_n על $X_m \times X_m$?

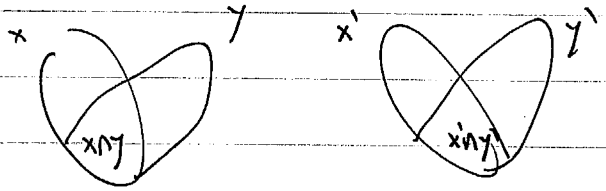
נראה ש-

$$X_m \times_{S_n} X_m \xrightarrow{\sim} \{0,1,\dots,m\}$$

$$[(x,y)] \longmapsto |x \cap y|$$

ברור שאם (x,y) ו- (x',y') הם באותו S_n-מסלול, אז $|x' \cap y'| = |x \cap y|$

להיפך, אם



$|x \cap y| = |x' \cap y'|$ אז יש העתקה חח"ע $x \cap y \xrightarrow{\sim} x' \cap y'$ והעתקה זו אפשר להרחיב להעתקה חח"ע $x \xrightarrow{\sim} x'$ ולהרחיב להעתקה חח"ע $y \xrightarrow{\sim} y'$ ולבסוף להרחיב להעתקה $g:[n] \to [n]$ חח"ע ועל שלוקחת את (x,y) ל- (x',y')

$\Leftarrow$ אם $\mathbb{C}(X_m) = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i^{n_i}$ אז $\sum_{i=1}^{k} n_i^2 = m+1$

(כי $|x \cap y| \in \{0,1,\dots,m\}$).

טענה: אם G פועלת על X, אז $\mathbb{C}(X)$ חסרת ריבועים (כלומר כל הצגה אי פריקה מופיעה לכל היותר פעם אחת) אמ"מ $[(x,y)] = [(y,x)]$ (כלומר, המסלול של $(x,y) \in X \times X$ תחת הפעולה G שווה למסלול של (y,x)).

הוכחה: ההעתקה $\varphi(x,y) \mapsto \varphi(y,x)$ משרה אינו' הומומורפיזם של $\mathbb{C}(X \times_G X)$ (זהו פשוט שחלוף מטריצות). אבל ההנחה $[(x,y)] = [(y,x)]$ אומרת שאינו' הזהו' זה הוא הזהות. לכן אינו' הזהו' = הזהו' $\Leftarrow$ האלגברה אבלית.
כיוון שאלגברה זו היא סכום של אלגברות מטריצות, היא תהיה אבלית אמ"מ מימדי המטריצות הן $= 1$. $\square$

אם נחזור לדוגמא: $m+1 = \sum_{i=1}^{k} n_i^2 = 1 + \cdots + 1$

לכן יש $m+1$ הצגות אי פריקות שונות עם ריבוי 1 בהצגה $\mathbb{C}(X_m)$.

תרגיל: הראו ש- $\mathbb{C}(X_{m-1}) \hookrightarrow \mathbb{C}(X_m)$ לכן ב- $\mathbb{C}(X_m)$ יש בדיוק הצגה אי פריקה אחת שאינה מופיעה ב- $\mathbb{C}(X_{m-1})$, מכאן:

ב- $R(S_n)$: $$U_m = \mathbb{C}(X_m) - \mathbb{C}(X_{m-1})$$

וכן - $$\chi_{U_m} = \chi_{\mathbb{C}(X_m)} - \chi_{\mathbb{C}(X_{m-1})}.$$