הרצאה 9

תתי-חבורות נורמליות

נניח ש-G חבורה סופית ו- $N \trianglelefteq G$ תת-חבורה נורמלית. בתורת החבורות, קורה הרבה פעמים שמידע על N ועל G/N עוזר להבין את G. משאלה 'נאיבית' תהיה להבין את ההצגות של G מתוך אלו של N ו- G/N.

(1) אם $G \simeq N \times G/N$ (מכפלה ישרה) זו אכן המציאות שכן הוכחנו $Irr(G_1 \times G_2) \simeq Irr(G_1) \times Irr(G_2)$

(2) אם $G \simeq N \rtimes G/N$ (מכפלה חצי-ישרה) זה 'כמעט' קורה כאשר N אבלית - נדון בכך בהמשך.

(3) עבור המקרה הכללי, עדיין אפשר לומר משהו - זו תורת Clifford.

נשים לב שאם $N \trianglelefteq G$ אז G פועלת על N בהצמדה, ולכן גם פועלת על ההצגות של N:

$$g \in G \ , \ \theta \in Rep(N) \ , \ \theta \mapsto {}^g\theta(n) := \theta(gng^{-1})$$

אם θ אי-פריקה אז גם ${}^g\theta$ אי פריקה כי

$$(\chi_{{}^g\theta}, \chi_{{}^g\theta}) = \frac{1}{|N|} \sum_{n \in N} \chi_{{}^g\theta}(n) \overline{\chi_{{}^g\theta}(n)} = \frac{1}{N} \sum_{n \in N} \chi_\theta(gng^{-1}) \overline{\chi_\theta(gng^{-1})} = (\chi_\theta, \chi_\theta)$$

לכן מקבלים פעולה $G \circlearrowright Irr(N)$. למעשה, כיוון ש-$N$ פועלת טריויאלית מקבלים

$$G/N \circlearrowright Irr(N)$$

משפט: תהא (ρ, V) הצגה אי-פריקה של G. יהי θ מרכיב אי-פריק של $Res^G_N(\rho)$. יהי $\{\theta = \theta_1, \dots, \theta_t\}$ המסלול של θ תחת פעולת G על $Irr(N)$. אז

$$Res^G_N(\rho) = \bigoplus_{i=1}^{t} \theta_i^{e}$$

כאשר $e := (\theta, Res^G_N(\rho))$ הריבוי של θ בצימצום של ρ ל-N.

הוכחה:

ראשית נראה שהמרכיבים האי-פריקים של $Res^G_N Ind^G_N(\theta)$ הם בדיוק $\theta_1, \dots, \theta_t$. אכן, מנוסחת Mackey שהוכחנו, עבור המקרה $K=H=N$ נקבל:

$$Res^G_N \, Ind^G_N(\theta) = \bigoplus_{g \in G/N} {}^g\theta$$

כי במקרה זה המחלקות הכפולות $N \backslash G / N$ שוות בדיוק למחלקות G/N.
שנית, מהדדיות Frobenius מקבלים:

$$\left(\rho, \mathrm{Ind}_N^G(\theta)\right) = \left(\mathrm{Res}_N^G(\rho), \theta\right) \geq 1$$

לכן ρ היא תת-הצגה של $\mathrm{Ind}_N^G(\theta)$. בפרט, המרכיבים האי פריקים של הצמצום של ρ ל-N הם $\theta_1, \dots, \theta_t$, כלומר:

$$\mathrm{Res}_N^G(\rho) = \theta_1^{e_1} \oplus \cdots \oplus \theta_t^{e_t}$$

נותר להראות ש- $e = e_1 = \cdots = e_t$. אכן,

$$e_i = \left(\theta_i, \mathrm{Res}_N^G(\rho)\right) = \left(\chi_{\theta_i}, \chi_\rho\right)$$

אם ${}^g\theta = \theta_i$

$$= \frac{1}{|N|} \sum_{n \in N} \chi_\theta(gng^{-1}) \overline{\chi_\rho(n)}$$

$$= \frac{1}{|N|} \sum_{n \in N} \chi_\theta(n) \overline{\chi_\rho(g^{-1}ng)}$$

כי χ_ρ פונקצית מחלקה של G

$$= \frac{1}{N} \sum_{n \in N} \chi_\theta(n) \chi_\rho(n) = \left(\theta, \mathrm{Res}_N^G(\rho)\right) = e$$

$\square$

מכפלות חצי-ישרות עם גרעין אבלי.

<u>הגדרה:</u> תהיינה H ו- A חבורות ונניח שנתון הומומורפיזם $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(A)$ (כלומר, H פועלת על A באוטומורפיזמים). המכפלה החצי ישרה של H ו- A עם פעולה φ תסומן $A \rtimes_\varphi H$, או בפשטות $A \rtimes H$. איבריה הם הזוגות הסדורים (a,h), $a \in A$, $h \in H$. הכפל נתון ע"י

$$(a_1, h_1)\cdot(a_2, h_2) = (a_1 \cdot {}^{h_1}a_2 \,,\, h_1 \cdot h_2)$$

(כאשר ${}^{h}a := \varphi(h)(a)$).

<u>דוגמאות</u> ① אם φ ההעתקה הטריויאלית מקבלים בפשטות את המכפלה הישרה $A \times H$.

② נביט בחבורת המטריצות ההפיכות מהצורה

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} h & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, h \in F^\times ,\ a \in F \right\}$$

כאשר F שדה. אז הכפל נתון:

$$\begin{pmatrix} h_1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_2 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 h_2 & h_1 a_2 + a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כלומר, כל איבר של $F^\times$ נותן אוטומורפיזם של F כחבורה חיבורית.
לכן $G = F \rtimes F^\times$. (שימו לב ש- $F \lhd G$ ומכאן הסימון $\rtimes$.)

③ אותה דוגמא תעבוד עבור מטריצות מהצורה

$$G = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} H & v \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \right\} \leq GL_n(F)$$

כאשר $H \in GL_{n-1}(F)$ ו- $v \in F^{n-1}$. מקבלים $G \cong F^{n-1} \rtimes GL_{n-1}(F)$.

בסעיף זה נראה כיצד למצוא את ההצגות האי-פריקות של מכפלה חצי ישרה עם גרעין אבלי. שיטה זו נקראת "little groups" method by Wigner and Mackey.

תהא: G חבורה סופית, $G \cong A \rtimes H$, A אבלית.

הערה: נחשוב על A כתת-חבורה של G, והפעולה היא הצמדה.

כיוון ש-A אבלית, ההצגות האי-פריקות שלה הן חד-ממדיות ומהוות חבורה.

נסמן חבורה זו ב-$\hat{A}$. G פועלת על A בהצמדה ולכן גם פועלת על $\hat{A}$:

$$\forall g\in G,\ \chi\in\hat{A},\ a\in A \qquad (g\chi)(a) = \chi(g^{-1}ag)$$

תהא χ_i ($i \in G\backslash\hat{A}$) מערכת נציגים למסלולים של G על $\hat{A}$.

לכל $i\in G\backslash\hat{A}$ נסמן ב-H_i את תת החבורה של H, המייצבת את χ_i: כלומר $h\in H_i$ מקיימים $h\chi_i = \chi_i$.

נסמן גם $G_i = A\cdot H_i$. נרחיב את הפונקציה χ_i מ-A ל-G_i ע"י

$$\chi_i(ah) = \chi_i(a) \qquad a\in A,\ h\in H_i$$

כיוון ש-H_i מייצבת את χ_i זהו <u>קרקטר</u> של G_i מדרגה 1:

$$\chi_i(a_1h_1a_2h_2) = \chi_i(a_1\cdot h_1a_2h_1^{-1}\cdot h_1 h_2)$$

$$\xrightarrow{\text{מהגדרת ההרחבה}} = \chi_i(a_1\cdot h_1a_2h_1^{-1})$$

$$\xrightarrow{\text{כי } \chi_i \text{ קרקטר של } A} = \chi_i(a_1)\,\chi_i(h_1a_2h_1^{-1})$$

$$\xrightarrow{\text{כי } h_1 \text{ במייצב של } \chi_i} = \chi_i(a_1)\,\chi_i(a_2)$$

$$\xrightarrow{\text{מהגדרת ההרחבה}} = \chi_i(a_1h_1)\,\chi_i(a_2h_2)$$

תהא ρ הצגה אי-פריקה של H_i. משיכה לאחור דרך העתקת המנה $G_i\to H_i$ נותנת הצגה שנסמנה $\tilde{\rho}$ של G_i. עכשיו, $\tilde{\rho}$ ו-χ_i שתיהן הצגות של G_i ולכן אפשר לקחת את המכפלה הטנזורית $\chi_i\otimes\tilde{\rho}$ ולקבל הצגה של G_i.

לבסוף נסמן:

$$\Theta_{i,\rho} := \mathrm{Ind}_{G_i}^{G}(\chi_i\otimes\tilde{\rho})$$

מסקנה:

① $\theta_{i,\tilde{\jmath}}$ אי פריקה.

② $\theta_{i,\tilde{\jmath}} \cong \theta_{i',\tilde{\jmath}'} \iff i=i'$ ו- $\tilde{\jmath}\cong\tilde{\jmath}'$.

③ כל הצגה אי פריקה של G איזומורפית ל- $\theta_{i,\tilde{\jmath}}$ עבור איזשהם i ו- $\tilde{\jmath}$.

דוגמא: תהא $G=\left\{\begin{pmatrix}h&a\\0&1\end{pmatrix}\right\}\cong\mathbb{F}_q\rtimes\mathbb{F}_q^\times$.

מתרגיל בית 5 נובע ש- $\hat{\mathbb{F}}_q\cong\mathbb{F}_q$ (כאן מתייחסים ל- $\mathbb{F}_q$ כחבורה חיבורית).

מהם המסלולים של $\mathbb{F}_q^\times$ על $\hat{\mathbb{F}}_q$? קל לראות שיש שני מסלולים $\mathbb{F}_q=\{0\}\amalg\mathbb{F}_q^\times$

מקרה 1: $\chi_0=$ הקרקטר הטריוויאלי של $\mathbb{F}_q$, $\chi_0(x)=1$ $\forall x\in\mathbb{F}_q$.

המייצב של χ_0 ב- $\mathbb{F}_q^\times$ הוא הכל, ולכן המשיכה לאחור היא ההצגה הטריוויאלית של G ואין מה להשרות כי $G=G_0$. כל הצגה של המנה $\mathbb{F}_q^\times$ נותנת הצגה חד מימדית של G:

$$\begin{aligned}G&\to\mathbb{F}_q^\times\\ \begin{pmatrix}h&a\\0&1\end{pmatrix}&\mapsto h\end{aligned}$$

מקבלים $q-1$ הצגות אי פריקות שונות חד מימדיות.

מקרה 2: $\chi_1:\mathbb{F}_q\to\mathbb{C}^\times$ קרקטר לא טריוויאלי (כלשהו). המייצב שלו ב- $\mathbb{F}_q^\times$ הוא $\{1\}$ לכן נקח את ההצגה הטריוויאלית של $\{1\}$ ונרחיב אותה להצגה הטריוויאלית של $\mathbb{F}_q$. "נרחיב" את χ_1 (אין צורך מה להרחיב). נקבל

$$\theta_{1,\text{triv}}=\chi_1:\begin{pmatrix}1&*\\0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\mathbb{C}^\times$$

$$\mathrm{Ind}_{\mathbb{F}_q}^{\mathbb{F}_q\rtimes\mathbb{F}_q^\times}(\chi_1)=$$ הצגה אי פריקה $q-1$ מימדית.

ואכן:

$$|\mathbb{F}_q^\times\ltimes\mathbb{F}_q|=(q-1)q=\underbrace{1^2+\dots+1^2}_{\substack{q-1\\ \text{חד מימדיות}\\ \text{מקרה 1}}}+\underbrace{(q-1)^2}_{\substack{\text{הצגה}\\ \text{אחת}\\ \text{ממימד}\\ q-1}}$$