להגשה עד 17/3/10

תורת ההצגות

תרגיל 1

1. תהא X קבוצה ו- G חבורה הפועלת על X. נסמן $V=\mathbb{C}(X)=\{f:X\to\mathbb{C}\}$ ונגדיר $(\rho(g)\cdot f)(x)=f(g^{-1}x)$ $\forall g\in G,\forall x\in X$. הוכיחו ש- $\rho:G\to Aut_{\mathbb{C}}(V)$ הצגה.

2. תהא $\pi:S_n\to GL_n(\mathbb{C})$ ההצגה הסטנדרטית של S_n. כלומר, ההצגה המוגדרת ע"י $\pi(\sigma)e_i=e_{\sigma(i)}$ $\forall\sigma\in S_n$ על הבסיס הסטנדרטי $e_1,\dots,e_n$ ומורחבת לינארית.

א. הראו שתת-המרחב $W=\mathbb{C}(e_1+e_2+\cdots+e_n)$ הנו תת הצגה של $\mathbb{C}^n$ שאיזומורפית להצגה הטריוויאלית.

ב. מצאו ל- W משלים ב- $\mathbb{C}^n$.

ג. עבור $n=3$ מצאו בסיס B שעבורו $\forall\sigma\in S_3$ $\pi(\sigma)\in\begin{bmatrix}*&*&0\\ *&*&0\\ 0&0&*\end{bmatrix}$ וחשבו במפורש את $\forall\sigma\in S_3,[\pi(\sigma)]_B^B$.

3. תהא V הצגת הפרמוטציה המתאימה לפעולה של חבורה G על קבוצה X סופית. הראו ש- $\chi_V(g)=|\{$ נקודות השבת של g ב- X $\}|$.

4. אם V ו- W הצגות של G עם קרקטרים χ_V ו- χ_W בהתאמה, אז

א. $\chi_{V\oplus W}=\chi_V+\chi_W$

ב. $\chi_{V^*}=\overline{\chi_V}$

ג. $\chi_{V\otimes W}=\chi_V\cdot\chi_W$

5. אם V ו- W מרחבים וקטוריים ממימד סופי, הראו שקיים איזומורפיזם קנוני $V^*\otimes W\xrightarrow{\sim}Hom(V,W)$. אם בנוסף V ו- W הם הצגות הראו שהאיזומורפיזם הוא של הצגות (עם הפעולות שהוגדרו בהרצאה).