להגשה עד 28/3/2010 — תורת ההצגות

תרגיל 3

1. מיצאו את כל ההצגות האי-פריקות של D_{2n}, $n\geq 3$ אי זוגי.
(הדרכה: מיצאו 2 הצגות חד-מימדיות שונות ו-$\frac{n-1}{2}$ הצגות דו-מימדיות שונות)

2. מיצאו את כל ההצגות האי-פריקות השונות של חבורת הקווטרניונים Q_8:

$$Q_8=\{\pm 1,\pm i,\pm j,\pm k\}$$

(כאשר: $i^2=j^2=k^2=-1$, -1 מתחלף עם כל איברי החבורה בכפל, ו-$-ji=ij=k,\ -kj=jk=i,\ -ik=ki=j$)
חשבו את טבלת הקרקטר של Q_8 והשוו אותה לטבלת הקרקטר של D_8.

3. תהי (V,ρ) הצגה של G. נסמן $V=\bigoplus_i V_i^{\oplus a_i}$ (הפירוק של V להצגות אי-פריקות שונות).
הראו שלכל i, ההעתקה $\varphi_i := \dim V_i\cdot\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_{V_i}(g)}\rho(g)$ היא:
(א) G-העתקה.
(ב) הטלה של V על $V_i^{a_i}$ (המרכיב האיזוטיפי של V_i ב-V).
שימו לב שאם V_i היא ההצגה הטריוויאלית, מקבלים את נוסחת ההטלה על V^G כמקרה פרטי.

4. (רשות) מיצאו את כל ההצגות האי-פריקות של חבורת הייזנברג מעל $\mathbb{F}_3$:

$$H=H(\mathbb{F}_3)=\left\{\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}\ \middle|\ a,b,c\in\mathbb{F}_3\right\}\leq GL_3(\mathbb{F}_3)$$

הדרכה: הראו שהמרכז של $H(\mathbb{F}_3)$ הוא כל האיברים מהצורה $Z(H)=\left\{\begin{pmatrix}1&0&b\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\middle|\, b\in\mathbb{F}_3\right\}$
ולכן ל-H יש תת חבורה נורמלית $Z(H)\cong C_3$, והראו כי $H/Z(H)\cong C_3\times C_3$.
מיצאו הצגות של H בעזרת משיכה לאחור מהמנה והשראה של קרקטרים לא טריוויאליים של $Z(H)$.