תורת הייצוגים — להגשה עד 28/4/10

תרגיל 5

1. תהא G חבורה סופית ו- H תת-חבורה. נסמן $e_H := \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H} h \in \mathbb{C}[G]$.

(א) הראו ש- e_H אידמפוטנט (כלומר $e_H^2 = e_H$).

(ב) הראו שהייצוג הטבעי $\mathbb{C}[G]\cdot e_H \cong \mathbb{C}(G/H) \cong \mathrm{Ind}_H^G(1)$ אי-צמוד.

(ג) הוכיחו שהאלג בטור $e_H\cdot\mathbb{C}[G]\cdot e_H$ ו- $\mathbb{C}(G/H\times_G G/H)$ אי-צמודים.

(הכפל בראשונה הוא הכפל באלג החבורה ובשניה כפל מטריצות $(\varphi\cdot\psi)(x,z)=\sum_y \varphi(x,y)\psi(y,z)$)

2. תהא $\mathbb{C}(X_m)$ הייצוג הרגולרי של S_n המתאים ל- $X_m = \{x\subseteq[n] \mid |x|=m\}$ ראינו שאלג בטור $\mathbb{C}(X_m\times_{S_n}X_m)$ הוא $(m+1)$-מימדי. נסמן

$$\varphi_i = \mathbb{1}_{\{(x,y)\mid |x\cap y| = m-i\}} \qquad (i=0,\dots,m)$$

(כאן בסיס של האלג בטור המורכב מפונקציות המציינים של מעגלים).

(שימו לב ש- X_m הוא מרחב מטרי עם מטריקה $d(x,y)=m-|x\cap y|$.

(א) הראו שהאופרטור T_{φ_i} המתאים ל- φ_i תחת ההתאמה שבנדרה בהרצאה (כלומר $T_{\varphi_i}:\mathbb{C}(X_m)\to\mathbb{C}(X_m)$) הוא אופרטור מיצוע על הסביבה ברדיוס i.

(ב) הראו שקיימים מספרים מרוכבים $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ כך ש:

$$\varphi_1\cdot\varphi_i = \alpha_i\varphi_{i+1} + \beta_i\varphi_i + \gamma_i\varphi_{i-1}$$

כפל מטריצות

(ג) הסיקו ש- $\mathbb{C}(X_m\times_{S_n}X_m)=\mathbb{C}[\varphi_1]$, כלומר, אלגברה פולינומים (ניתן דוגמה מפורשת) ב- φ_1.