להגשה עד 15/5/10   תורת ההצגות

תרגיל 6

1. הוכיחו ש- $dxdy/(x^2+y^2)$ היא מידת האר של החבורה הכפלית $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ביחס לקואורדינטות $z=x+iy$. חשבו את המידה של הקבוצה $\{z \mid 1\le |z| \le 2\}$.

2. תהא G חבורת ההעתקות האפיניות של $\mathbb{R}$ מהצורה $T_{a,b}(x)=ax+b\ (\forall x\in\mathbb{R})$ כאשר $a>0$ ו- $b\in\mathbb{R}$. הראו ש- $dadb/a^2$ היא מידת האר שמאלית ו- $dadb/a$ היא מידת האר ימנית.

3. הוכיחו ש- $\mathbb{Z}_p=\{x\in\mathbb{Q}_p \mid |x|_p\le 1\}$ הוא חוג קומפקטי. יתר על כן הראו שזהו חוג מקומי עם אידיאל מקסימלי $p\mathbb{Z}_p$.

4. הראו שכל שני כדורים $B(a,r)$ (כדור עם מרכז a ורדיוס r) ב- $\mathbb{Q}_p$ הם או זרים או שאחד מוכל בשני. הראו שכל נקודה בכדור היא מרכז שלו.

5. הראו שכל איבר ב- $\mathbb{Q}_p$ הוא מהצורה הבאה: $\sum_{j=-m}^{\infty} c_j p^j$ $\quad m\in\mathbb{N}$ כאשר $c_j\in\{0,\dots,p-1\}$ ושהצגה יחידה (בפרט הראו שהטור מתכנס p-אדית).

6. נסמן ב- μ את מידת האר האדיטיבית של $(\mathbb{Q}_p,+)$ עם הנירמול $\mu(\mathbb{Z}_p)=1$. הוכיחו שלכל E מדידה, ולכל $a\in\mathbb{Q}_p^\times$ מתקיים $\mu(aE)=|a|_p\mu(E)$.

7. תהא G חבורה קומפקטית. הראו שמידת האר ימנית היא גם שמאלית.

8. (העשרה) תהא G חבורה כלשהי. נסמן ב- $\mathcal{N}$ את אוסף כל תתי החבורות הנורמליות של G מאינדקס סופי. לכל זוג $N_1\subset N_2$ איברים ב- $\mathcal{N}$ יש הומומורפיזם טבעי $\varphi_{N_1,N_2}:G/N_1\to G/N_2$. נסמן ב- H את תת הקבוצה של $\prod_{N\in\mathcal{N}} G/N$ המכילה את G הסדרות הקומפטביליות עם ההעתקות $\{\varphi_{N_1,N_2}\}$, כלומר אם (g_N) איבר ב- H אז $\varphi_{N_1,N_2}(g_{N_1})=g_{N_2}$ לכל זוג $N_1\subset N_2$. הוכיחו ש- H היא תת-חבורה קומפקטית של $\prod_{N\in\mathcal{N}} G/N$. היא נקראת ההשלמה הפרוסופית של G ומסומנת גם $\varprojlim_N G/N$.