נושאים נבחרים במתמטיקה – 43 תרגילים 5

① נסמן ב- $s(A)$ את השטח של פוליגון ב- $\mathbb{R}^2$. הפונקציה s מקיימת

(א) $s(A)\geq 0$ לכל פוליגון

(ב) אם A ו- B פוליגונים חופפים (כלומר יש איזומטריה של $\mathbb{R}^2$ המעתיקה אחד לשני) אז $s(A)=s(B)$.

(ג) אם B הוא איחוד של פוליגונים עם פנים זרים $A_1,\dots,A_n$ אז
$$s(B)=s(A_1)+\dots+s(A_n)$$

(ד) אם A ריבוע יחידה אז $s(A)=1$.

הוכיחו שאם $\varphi:\left\{\substack{\text{אוסף}\\\text{הפוליגונים}\\\text{ב-}\mathbb{R}^2}\right\}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ מקיימת את (א) – (ד) אז $\varphi=s$.

② <u>הגדרה:</u> שני פוליגונים A, B ב- $\mathbb{R}^2$ נקראים <u>שווי</u> <u>פירוק</u> אם יש פוליגונים $A_1,\dots,A_n$ ו- $B_1,\dots,B_n$ עם פנים זרים כך ש- $A=\bigcup_{i=1}^n A_i$ ו- $B=\bigcup_{i=1}^n B_i$ כך ש- $A_i\cong B_i$ (כלומר קיימת איזומטריה של $\mathbb{R}^2$ המעתיקה את A_i על B_i).

מתכונות פונקציית השטח מ- ① ברור שאם A ו- B שווי פירוק אז $s(A)=s(B)$.
בתרגיל זה נוכיח את הכיוון ההפוך.

(א) הוכיחו שהיחס $A\equiv B$ (A ו- B שווי פירוק) הנו יחס שקילות

(ב) הראו שכל שני מלבנים עם אותו שטח הם שווי פירוק, ואף ניתן לממש את הפירוק ע"י הזזות בלבד (בלי סיבובים ושיקופים)

(ג) הראו שכל שני פוליגונים שווי שטח הם שווי פירוק.

③ איזומטריות של $\mathbb{R}^n$.

יהי $H\subseteq\mathbb{R}^n$ על מישור (= הזזה של תת-מרחב ממימד $n-1$). <u>שיקוף</u> <u>ביחס ל-H</u> זו האיזומטריה α_H של $\mathbb{R}^n$ המקיימת $\alpha_H(x)=x$ $\forall x\in H$ ו- $\alpha_H(y)=y'$ לכל $y\notin H$, כאשר $y'\neq y$ היא הנקודה היחידה הנמצאת על הישר המאונך ל-H ועובר דרך y המקיימת $d(y,H)=d(y',H)$.

הוכיחו שכל איזומטריה של $\mathbb{R}^n$ ניתן לכתוב כהרכבה של לכל היותר $n+1$ שיקופים.

④ חבורות חופשיות ב- $SO(3)$.

(•) נסמן $SO(3)=\{g\in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid g^t g=I,\ \det g=1\}$ (החבורה האורתוגונלית המיוחדת)

(••) החבורה החופשית על שני יוצרים היא אוסף המילים באותיות $\{a,b,a^{-1},b^{-1}\}$ כאשר פעולת החבורה היא שרשור מילים.

⑤ הוכיחו שאם G חבורה הפועלת על קבוצה X, $a,b\in G$ איברים כך שקיימות תת-קבוצות של X A^+, A^-, B^+, B^- כך ש

(i) $X\supsetneq A^+\cup A^-\cup B^+\cup B^-$

(ii) $a(X\setminus A^-)\subseteq A^+$, $a^{-1}(X\setminus A^+)\subseteq A^-$

$b(X\setminus B^-)\subseteq B^+$, $b^{-1}(X\setminus B^+)\subseteq B^-$

אז a,b יוצרים תת-חבורה חופשית של G.

(ג) הוכיחו שאם

$$a = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

ו-

$$A^{\pm} = 5^{\mathbb{Z}} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, x,y,z \in \mathbb{Z},\ x \equiv \pm 3y \bmod 5,\ z \equiv 0 \bmod 5 \right\}$$

$$B^{\pm} = 5^{\mathbb{Z}} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, x,y,z \in \mathbb{Z},\ z \equiv \pm 3y \bmod 5,\ x \equiv 0 \bmod 5 \right\}$$

$$X = A^{+} \cup A^{-} \cup B^{+} \cup B^{-} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

אז מתקיימים תנאי סעיף (א) ולכן $\langle a,b \rangle \leq SO(3)$ יוצרים תת חופשית.

*(ד) הוכיחו שאם $a, b \in SO(3)$ הן סיבובים בזווית α סביב ציר x ו-z בהתאמה כאשר $\cos\alpha$ טרנסצנדנטי, אז $\langle a,b \rangle$ חופשית.