נושאים נבחרים במתמטיקה - 43 תרגילים 7

1. אני לוקח תמורה $\sigma \in S_{100}$, 100 קופסאות ממוספרות על ידי $1,2,3,\dots,100$, ובקופסא ה-i שם פתק שעליו רשום $\sigma(i)$. יש לכם עוזר שיכול להציץ בכל הקופסאות ולהחליף בין הפתקים הנמצאים בשתי קופסאות בהתאם לאסטרטגיה שסיכמתם עליה. לאחר מכן העוזר עוזב, מבלי לדבר איתכם, ואז אני בוחר מספר בין 1 ל-100 ועליכם למצוא אותו, כאשר מותר לכם לפתוח 50 קופסאות. הראו שתמיד ניתן לעשות זאת.

2. (גירסה הסתברותית של (1))

מנהל בית כלא מחליט בוקר אחד לתת ל-100 אסירים הזדמנות להשתחרר מהכלא. הוא מגריל תמורה σ של הקבוצה $\{1,2,\dots,100\}$ (עם הסתברות שווה לכל תמורה), מסדר 100 קופסאות ובקופסא ה-i שם פתק שעליו רשום המספר $\sigma(i)$. לכל אחד מהאסירים יש מספר, בין 1 ל-100, וכל אחד מתבקש בתורו למצוא את הקופסא המכילה אותו כאשר מותר לו להציץ ב-50 קופסאות.
האסירים לא יכולים לדבר זה עם זה אחרי שהציצו בקופסאות.
האסירים משתחררים רק אם כולם מצאו את המספר שלהם.
מה ההסתברות שכולם ישתחררו?

③ יהי $0 \neq q \in \mathbb{C}$ ונסמן ב- $\mathbb{C}_q[x,y]$ את האלגברה המורכבת של

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \{ x^i y^j \mid i,j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \}$$

עם כפל המוגדר על מונומים באמצעות $x^i \cdot x^j = x^{i+j}$, $y^i \cdot y^j = y^{i+j}$, $x \cdot y = q y \cdot x$,
ומורחב לינארית. (למשל, אם $q=1$ מקבלים את אלגברת הפולינומים בשני משתנים.)

לכל $m,n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ נסמן

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \begin{cases} \dfrac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-m+1})}{(1-q^m)(1-q^{m-1})\cdots(1-q)} & m \leq n \\ 0 & m > n \end{cases}$$

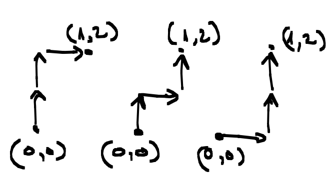
א) הראו ש- $(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q x^m y^{n-m}$

ב) הראו ש- $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_{q=1} = \binom{n}{m}$

ג) הראו ש- $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q$ הוא פולינום ב- q עם מקדמים שלמים.

ד) לכל $m,n \in \mathbb{N}$ נסמן ב- $p(m,n)$ את מספר המסילות השונות המורכבות מקטעים מכוונים מהצורה $(i,j) \to (i,j+1)$ או $(i,j) \to (i+1,j)$ כאשר ומחברות את הנקודה $(0,0)$ לנקודה (m,n).

למשל $P(1,2) = 3$ כי המסילות השונות הן



הראו ש- $p(m,n) = \binom{n+m}{n}$. הראו שמספר המסילות מ- $(0,0)$ ל- (m,n) שהשטח מתחת למסילה שווה ל- k הוא המקדם של q^k בפולינום $\begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix}_q$.

(ג) נניח עכשיו ש- q חזקה של ראשוני. נסמן ב- $\mathbb{F}_q$ את השדה עם q איברים.

הראו ש- $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q$ הוא מספר תתי המרחבים של $\mathbb{F}_q^n$ ממימד m.