נושאים נבחרים במתמטיקה - דף תרגילים 8

① יהי X מרחב האוסדורף קומפקטי. נסמן $C(X)=\{f:X\to\mathbb{C} \mid f \text{ רציפה}\}$.

$C(X)$ היא אלגברה קומוטטיבית עם חיבור וכפל נקודתיים.

הראו שהאידיאלים המקסימליים של $C(X)$ הם בהתאמה חח"ע עם נקודות X ונתונים ע"י $I_x=\{f\in C(X) \mid f(x)=0\}$, $x\in X$.

② המספרים הראשוניים.

ⓐ הוכיחו ש- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\prod_{p \text{ ראשוני}}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$ והסיקו שיש ∞ ראשוניים.

ⓑ נגדיר טופולוגיה על $\mathbb{Z}$ באופן הבא:

$U\subseteq\mathbb{Z}$ היא פתוחה אמ"ם $U=\phi$ או ש-U היא איחוד של סדרות חשבוניות מהצורה $S(a,b)=\{an+b \mid n\in\mathbb{Z}\}$, $(a\neq 0)$.

- הראו שזו אכן טופולוגיה.
- הסיקו מהשוויון $\mathbb{Z}\setminus\{\pm1\}=\bigcup_{p \text{ ראשוני}} S(p,0)$ שיש ∞ ראשוניים.

3. יהי p ראשוני, נגדיר על $\mathbb{Z}$ מטריקה באופן הבא

$$d_p(x,y) = \frac{1}{p^r} \quad \text{כאשר} \quad r = \max\{s \in \mathbb{N}_0 : p^s \mid x-y\}.$$

א. הוכח ש- $d_p(\cdot,\cdot)$ מטריקה.

ב. נסמן ב- $\mathbb{Z}_p$ את ההשלמה של $\mathbb{Z}$ ביחס למטריקה d_p.

הוכח שסדרות מהצורה $A_N = \sum_{i=0}^{N} a_i p^i$, $0 \le a_i < p$

מתכנסות ביחס למטריקה d_p.

הוכח ש- $\mathbb{Z}_p$ הנו אוסף הגבולות של סדרות כאלה, כלומר

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i \;\middle|\; 0 \le a_i < p \right\}$$

ג. הוכח ש- $\mathbb{Z}_p$ חוג עם אידאל <u>מקסימלי</u> <u>יחיד</u>

$$I = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i p^i \;\middle|\; 0 \le a_i < p \right\}$$