נושאים נבחרים במתמטיקה - דף תרגילים 9

(1) המשך לתרגיל (3) בדף תרגילים 8.

(א) הוכיחו ש- $\mathbb{Z}_p$ קומפקטי.

(ב) הוכיחו שלכל שני כדורים ב- $\mathbb{Z}_p$, כלומר קבוצות מהצורה

$$B\left(a, \frac{1}{p^r}\right) = \left\{ x \in \mathbb{Z}_p \;\middle|\; d_p(a,x) \le \frac{1}{p^r} \right\},$$

מתקיים: $B_1 \cap B_2 = \phi$ או $B_1 \subseteq B_2$ או $B_2 \subseteq B_1$.

(ג) הוכיחו שכל נקודה בכדור B היא המרכז שלו.

(2) הגדרנו $\zeta(x) = \sum_{n \ge 1} \frac{1}{n^x}$ ו- $\eta(x) = \sum_{n \ge 1} \frac{\mu(n)}{n^x}$

כאשר

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{מספר זוגי של ראשוניים שונים } n \text{ מכפלה של} \\ -1 & \text{מספר אי-זוגי של ראשוניים שונים } n \text{ מכפלה של} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

הוכיחו ש- $\eta(x) = \frac{1}{\zeta(x)}$.

(אפשר להתייחס ל- x ממשי או מרוכב כאשר $Re(x) > 1$)

③ השתמשו במשפט הבא כדי להוכיח ריגורוזית ש- $\prod_{p \text{ ראשוני}} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{p^x}\right)}$

מתכנס עבור $x>1$ (או $Re(x)>1$ אם x מרוכב).

<u>משפט</u>: תהי (a_n) סדרה (ממשית או מרוכבת) שאבריה שונים מ- -1.

כך ש- $\sum_1^\infty a_n$ מתכנס בהחלט. אז $\prod_{n\geq 1}(1+a_n)$ מתכנס.

④ ⓐ יהי $0<r\in\mathbb{R}$. נסמן $N(r)=\left|\mathbb{Z}^2\cap B(0,r)\right|$, כלומר

מספר הנקודות עם קואורדינטות שלמות בעיגול ברדיוס r ב- $\mathbb{R}^2$.

הראו שמתקיים: $\lim_{r\to\infty}\frac{N(r)}{\pi r^2}=1$.

ⓑ נסמן $M(r)=\left\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\cap B(0,r) \;\middle|\; m \text{ ו- } n \text{ זרים}\right\}$

הראו שמתקיים: $\lim_{r\to\infty}\frac{M(r)}{\pi r^2}=\frac{1}{\zeta(2)}$.

$\left(\zeta(2)=\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\right)$