פרק 8

חבורות אוניפוטנטיות

מטריצות אוניפוטנטיות: $g \in GL_n(k)$ אוניפוטנטית אם $g-1$ נילפוטנטית.

הערה: אם g,h אוניפוטנטיות מתחלפות אז גם $g\cdot h$, $g\otimes h$, $g|_W$, $g|_{V/W}$, g_{V^*} אוניפוטנטיות.

$$\left(g\cdot h = g(h-1)+g-1 \;,\quad k[g,h]\to k[g]\otimes k[h] \;,\; \dots \right)$$

משפט: תהי $H\le GL_n(k)$ אבלית מטריצות, $g\in H$ אוניפוטנטית. אז כל הצגה של H g פועלת אוניפוטנטית, בפרט אוניפוטנטיות אינה תלויה בשיכון ל-GL_n.

משפט Kolchin: תהי $G\le GL_n(k)$ חבורה שאבריה כולם מטריצות אוניפוטנטיות.

אז יש בסיס של k^n שבו כל אברי G משולשיות עליונות.

כלומר $\exists g\in GL_n(k), gGg^{-1}\le U_n(k)$.

הוכחה: קל. נובע מכך שיש $0\neq v\in k^n$ שהוא נקודת שבת של G.

מסקנה: אם $G\le GL_n(k)$ חבורה שכל אבריה אוניפוטנטיים אז גם G אברי $\bar{G}$ אוניפוטנטיים.

סכימות חבורה אוניפוטנטיות

הגדרה: סכימת חבורה אפינית G נקראת אוניפוטנטית אם בכל הצגה של G יש וקטור שבת $\neq 0$.

כלומר: $\rho: V \longrightarrow V\otimes A$ קו-מודול וקיים $v\neq 0$ כך ש- $\rho(v) = v\otimes 1$.

משפט: תהא G סכימת חבורה אפינית אלגברית. התנאים הבאים שקולים:

(1) G אוניפוטנטית

(2) בכל שיכון סגור $G\hookrightarrow GL_n$ יש איבר $g\in GL_n(k)$ כך ש-

$$gGg^{-1}\subseteq U_n$$

(3) G איזומורפית לתת-סכמה סגורה של U_n.

(4) האלגברה $k[G]$ היא קו-קשירה, כלומר, קיימת סדרה

$$k=C_0\subseteq C_1\subseteq\cdots, \quad \bigcup C_i = k[G]$$

ו- $\Delta(C_r)\subseteq\sum_{i=0}^{r} C_i\otimes C_{r-i}$.

אם G מצומצמת מעל שדה סגור אלגברית אז כל אלה שקולים לכך שכל איברי $G(k)$ אוניפוטנטיים.

הוכחה: $(1) \Rightarrow (2)$ אם ל-G יש וקטור שבת אז האינדוקציה
של משפט Kolchin נותנת את הבסיס הדרוש. אם יש $0 \neq v_1 \in k^n$
עם $g v_1 = v_1 \; \forall g$ $\Leftarrow$ $g \curvearrowright k^n / k v_1$ פועלת אוניפוטנטית
ובאינדוקציה יש בסיס $v_1, \dots, v_n$ כנדרש.

$(2) \Rightarrow (3)$ כי G סגורה תת-חבורה שמוכלת במשולשית GL_n.

$(3) \Rightarrow (4)$ אם (4) נכון לאלגברת הופף A אז גם $B = A/I$
כי תת-אלגברת (הופף) המנה של התמונות של C_i מקיימות את
הנדרש עבור B ולכן מספיק להראות את (4) עבור U_n.

במקרה זה $A = k[x_{ij} \mid i<j]$ עם קו-כפל

$$\Delta(x_{ij}) = x_{ij} \otimes 1 + 1 \otimes x_{ij} + \sum_{i<l<j} x_{il} \otimes x_{lj}$$

נגדיר את "המשקל" של x_{ij} כ- $j-i$, וכך שמונום $\prod x_{ij}^{n_{ij}}$
יש משקל $\sum_{i<j} n_{ij}(j-i)$. נסמן ב- C_m את תת-המרחב הנפרש
ע"י מונומים ממשקל $\leq m$. ברור ש- $C_0 = k$, $\bigcup C_m = A$.

כדי להראות ש- $\Delta(C_m) \subseteq \sum C_i \otimes C_{m-i}$ מספיק לבדוק על איברי בסיס.

עבור x_{ij}:
$$\Delta(x_{ij}) = \underbrace{x_{ij}}_{m=j-i} \otimes 1 + 1 \otimes \underbrace{x_{ij}}_{m} + \sum_{i<l<j} \underbrace{x_{il}}_{\nu} \otimes \underbrace{x_{lj}}_{\mu}$$

$$\nu + \mu = l - i + j - l = j - i = m$$

באינדוקציה על המשקל, אם הטענה נכונה לפולינומים p,q ממשקל r,s

אז $\Delta(pq)=\Delta(p)\Delta(q)$ נמצא ב-

$$\left(\sum_i C_i\otimes C_{r-i}\right)\left(\sum_j C_j\otimes C_{s-j}\right)$$

$$\subseteq \sum_{i,j} C_iC_j\otimes C_{r-i}C_{s-j} \subseteq \sum C_{i+j}\otimes C_{r+s-i-j}$$

$(4)\Leftarrow(1)$ יהי $\rho: V\to V\otimes A$ קומודול. נסמן

$$V_r=\{v\in V \mid \rho(v)\in V\otimes C_r\}$$

אז $V=\bigcup V_r$. ולכן יש $0\neq v\in V_0$ אז סימון כ

אז $\rho(v)=v'\otimes 1$ וע״י האקסיומה ε נקבל ש- $v'=v$.

ומצאנו וקטור שבת.

כדי להראות $V_0\neq(0)$ נראה ש- $V_{r+1}=(0)\Leftarrow V_r=(0)$.

$$\rho(V_{r+1})\subseteq V\otimes C_{r+1}$$

$$\Rightarrow (id\otimes\Delta)\rho(V_{r+1})\subseteq V\otimes\left(\sum C_i\otimes C_{r+1-i}\right)$$

ולכן V_{r+1} מוכל ב-(0) ע״י ההעתקה המורכבת

$$V\to V\otimes A/C_r\otimes A/C_r$$

מכאן שגם $(\rho\otimes id)\rho = (id\otimes\Delta)\rho$. כיוון ש-$V_r=(0)$ ההרכבה:

$$V \to V\otimes A/C_r \quad \text{מתאפס.}$$

$$V \to \left(V\otimes A/C_r\right)\otimes A/C_r \quad \text{גם מתאפס}$$

ולכן $V_{r+1}=(0)$. □

מסקנה:

(א) אם G אוניפוטנטית אז כל תת חבורה סגורה של G גם.

(ב) אם G אוניפוטנטית ומוכלת ע"י אלגברת הופף A אז סגורה שמוכלת ע"י תת-אלגברת הופף B של A גם היא אוניפוטנטית.

(ג) אם L/k הרחבת שדות אז G אוניפוטנטית אם"ם G_L אוניפוטנטית.

הוכחה: (א) נובע מ-(3).

(ב) נובע מ-(1).

(ג). אם G מקיימת את (4) אז גם G_L.

אם G_L מקיימת את (1) אז גם G כי המשוואה $\rho(v)=v\otimes 1$ לינארית. □

מסקנה:

(א) אם G אוניפוטנטית ו-H אלגברית מיוחסת כפלית אז אין הומו' פרט לטריוויאלי $G \to H$.

(ב) אם G ו-H ת"ח של סכימת חבורה אפינית, G אוניפוטנטית ו-H מיוחסת כפלית אז $G \cap H = \{1\}$.

הוכחה: (א) אפשר לעבור ל-$\bar{k}$ כי הומו' פרט טריוויאלי נשאר כזה אחרי הרחבת סקלרים. כיוון ש-$\mu_n \le \mathbb{G}_m$ מספיק להראות ש-$\mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_m)$ טריוויאלי. אבל העתקה $G \to \mathbb{G}_m$ היא בפרט הצגה חד-ממדית ולכן טריוויאלית מההגדרה של חבורה אוניפוטנטית.

(ב) מהמסקנה הקודמת $G \cap H$ אוניפוטנטית ולכן $G \cap H \hookrightarrow H$ (השיכון) חייב להיות טריוויאלי מ-(א). □

אנדומורפיזמים של $\mathbb{G}_a$

משפט: אם המציין של k הוא אפס אז $k = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_a)$.

אם המציין של k הוא p אז $\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_a)$ הוא אלג' הפולינומים המעוותת כלומר $k[F]$ עם הפעולה $F\lambda = \lambda^p F$ ($\lambda \in k$, $F(x) = x^p$).

הוכחה: כל הומו' $\mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$ מתאים לפולינום $Q \in k[x]$ המקיים

$\Delta(Q) = Q\otimes 1 + 1 \otimes Q$. עבור $Q = \sum a_n x^n$ זה אומר ש:

$$a_n\left(x\otimes 1 + 1\otimes x\right)^n = a_n\left(x^n \otimes 1 + 1\otimes x^n\right)$$

$n=0$: $a_0(1\otimes 1) = a_0\cdot 2(1\otimes 1) \Rightarrow a_0 = 0$.

$n>1$, $\mathrm{char}\,k=0$: $a_n = 0$. ולכן $Q = a_1 x$, $a_1\in k$, כנדרש.

$n>1$, $\mathrm{char}\,k=p$: נרשום $n=p^r\cdot s$, $(s,p)=1$. אז

$$(x\otimes 1+1\otimes x)^n = \left(x^{p^r}\otimes 1 + 1\otimes x^{p^r}\right)^s = \cdots + s\,x^{p^r}\otimes x^{(s-1)p^r} + \cdots$$

ולכן $a_n = 0$ אם $s\neq 1$. כלומר $Q = \sum_j b_j x^{p^j}$. כיוון ש-

$F(x) = x^p$ אז הראינו שכל הומו' הוא מהצורה $\sum b_j F^j$.

$$F\circ b\,(x) = F(bx) = F(b)F(x) = b^p\circ F\,(x) \qquad \square$$

הפעלת F כפל בסקלר

במציין p מגדירים את F פרוביניוס של $\mathbb{G}_a$ כגרעינים של הומומורפיזמים

(למשל, תרגיל 7 מראה שאלו כולם).

דוגמא: ① $(\ker F^n)(R) = \{x\in R \mid x^{p^n} = 0\}$ (קשירה)

② $(\ker(F-1))(R) = \{x\in R \mid x^p - x = 0\}$

מוכלת ע"י $k[x]/(x^p-x)$ ולכן גלואה כי x^p-x ספרבילי.
ומצאנו, כיוון שפרובניוס יוצר חבורת גלואה טריוויאלית $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \ker(F-1)$.

סגירות אוניפוטנטיות סלביות

משפט: אם $\mathrm{char}(k)=0$ אז סגירות חבורה אלגברית לא טריוויאלית אינה יכולה להיות אוניפוטנטית.

הוכחה: ע"י שינוי בסיס ל-$\bar{k}$ מספיק להראות סגירות חבורה קבועה, נניח עם חבורה $n=|\Gamma|$, אם נשכן אותה כחבורת מסדר-n נקבל שכל איבר מקיים $x^n-1=0$, אם g אוניפוטנטי נקבל $g=1$. ∎

הערה: בהמשך נראה שכל סגירה סלבית במציין 0 היא כזאת.

מסקנה: אם $\mathrm{char}(k)=0$ אז כל סגירות חבורה אלגבריות אוניפוטנטיות היא קשירה.

הוכחה: $\pi_0(G)$ מוכלת ע"י תת-אלגברה הולפ ספרבילית אוניפוטנטית.