סכימות חבורה אפיניות

אם R חוג (קומוטטיבי עם 1) אזי יכולים להתאים לו חבורות באופן טבעי:

$$SL_n(R),\ GL_n(R),\ G_m(R)=GL_1(R),\ G_a(R)=(R,+),\ \mu_n(R),\ O(R)$$

אם $\varphi:R\to S$ הומו' של חוגים מקבלים הומו' של חבורות, למשל $\varphi: GL_n(R)\to GL_n(S)$.

טבעי, לכן, לנסות לחקור את כל החבורות הללו סימולטנית תוך ניצול הקשרים ביניהן. למשל

$$\mathbb{F}_p \twoheadleftarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$$

$$SL_n(\mathbb{F}_p) \twoheadleftarrow SL_n(\mathbb{Z}) \hookrightarrow SL_n(\mathbb{Q})$$

המיוחד בדוגמאות הנ"ל הוא שהמשוואות שמגדירות את החבורות הן מעל $\mathbb{Z}$.

לכן לכל חוג R מתקבלת חבורה (הסיבה היא ש-$\mathbb{Z}$ אובייקט ראשון בקטגוריה של חוגים)

זה לא תמיד המצב, למשל, אם (נניח) במשוואות ההגדרה שמתקבלות יש $\begin{bmatrix}1&2\\ \sqrt{3}&0\end{bmatrix}$ יש לדרוש ש-$\sqrt{3}\in R$. לכן נוח לעבוד עם חוג בסיס, נקרא לו k, שהמשוואות שמגדירות את החבורה נמצאות ב-$k[x_\alpha]$. והחוגים בהם נתבונן במקרה כזה יהיו כאלו שיש הומו' $\varphi:k\to R$ כך שיש מובן להצבת איברים מ-R (=k-אלגבראות).

אם מסתכלים עכשיו על G כ-k-אלגבראות מקבלים פונקטור, למשל אם $G=GL_n$

① $R\xrightarrow{\varphi} S \xrightarrow{\psi} T$ משרה $G(R)\xrightarrow{G(\varphi)} G(S)\xrightarrow{G(\psi)} G(T)$ ו- $G(\psi\circ\varphi)=G(\psi)\circ G(\varphi)$

② $G(id_R)=id_{G(R)}$

פנקטורים ייצוגים

k חוג (קומוטטיבי עם 1).

נסמן ב- $k\text{-Alg}$ את הקטגוריה של אלגבראות מעל k:

עצמים הם k-אלגבראות (= R חוג קומוטטיבי עם 1, $k\to R$ הומומורפיזם)

מורפיזמים $\varphi: R\to S$ (הומומורפיזם של חוגים וגם k-מודולים)

Σ משפחה של פולינומים ב- $k[x_\alpha \mid \alpha\in\Lambda]$, Λ קבוצת אינדקסים כלשהי.

המשפחה Σ מגדירה פנקטור

$$F=F_\Sigma: k\text{-Alg} \longrightarrow \text{Sets}$$

$$R \longmapsto F(R)$$

הפתרונות של המערכת Σ מעל R

תמונות המשתנים x_α במנה $A=k[x_\alpha]/\langle\Sigma\rangle$ מהוות פתרון למערכת המשוואות Σ, $f=0,\ f\in\Sigma$.

אלו הם פתרונות שמספקים את כל המשוואות הללו ורק אותן.

אם $\varphi: A\to R$ הומו' הוא מעתיק את הפתרון $(\bar{x}_\alpha)$ לפתרון $\varphi(\bar{x}_\alpha)\in F(R)$.

כיוון ש-φ כבר נקבע לחלוטין ע"י ערכיו על $(\bar{x}_\alpha)$ מקבלים שיכון

$$\text{Hom}_k(A,R) \hookrightarrow F(R)$$

למעשה הוא גם על כי בהינתן פתרון $(r_\alpha)\in R^\Lambda$ אפשר להגדיר הומו' $x_\alpha \to r_\alpha$

וכיוון ש-(r_α) פתרון נקבל הומו' $A\to R$.

מקבלים התאמה טבעית (של פונקטורים) : $Hom_k(A,-) \simeq F(-)$

$$\begin{array}{ccc} Hom_k(A,R) & \longrightarrow & F(R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Hom_k(A,S) & \longrightarrow & F(S) \end{array}$$

נשים לב שכל k-אלגברה A מתקבלת כך:

בהינתן A, ניקח יוצרים $\{a_\alpha\}$ של A (כ-k-אלגברה), ניקח את חוג הפולינומים במשתנים $\{x_\alpha\}$ ונעתיק $k[x_\alpha] \to A$, $x_\alpha \mapsto a_\alpha$.
אז A היא בדיוק $k[x_\alpha]/I$ וניקח Σ להיות קבוצה יוצרת של I.

הוכחנו אם כן

משפט: יהי $F: k\text{-Alg} \to Sets$ פונקטור. אם $F(R)$ מתאים לפתרונות ב-R של משפחה של משוואות אז יש k-אלגברה ואיזומורפיזם טבעי בין $F(-)$ ל-$Hom_k(A,-)$. ההיפך גם נכון: כל פונקטור F ששקול ל-$Hom_k(A,-)$ עבור איזושהי k-אלגברה A, מגיע ממערכת משוואות.

הגדרה: פונקטור F ששקול לפונקטור מהצורה $Hom_k(A,-)$ נקרא פונקטור יציג.

הגדרה: סכימת חבורה אפינית היא פונקטור יציג

$$G: k\text{-Alg} \longrightarrow Groups$$

בדוגמאות כאלה שיש לנו העתקות טבעיות של פונקטורים, למשל

$$det : GL_n(\cdot) \longrightarrow G_m(\cdot)$$

$$\begin{tikzcd} GL_n(R) \arrow[r, "det"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G_m(R) \arrow[d, "\varphi"] \\ GL_n(S) \arrow[r, "det"] & G_m(S) \end{tikzcd} \qquad \forall \varphi : R \to S$$

משפט (הלמה של Yoneda):

יהיו E ו- F פונקטורים יציגים מ- k-אלגבראות לקבוצות המיוצגים ע"י אלגבראות A ו- B בהתאמה. אז ההעתקות הטבעיות $E \to F$ הן בהתאמה חח"ע ועל עם הומומורפיזמים של k-אלגבראות $B \to A$.

הוכחה: אפשר להניח ש- $E = Hom_k(A,-)$ ו- $F = Hom_k(B,-)$. יש להראות

$$Hom_{k\text{-}Alg}(B,A) \cong Hom_{Funct}\left(Hom_k(A,-), Hom_k(B,-)\right)$$

כיוון ראשון:

$$\varphi \longmapsto \left(\varphi^*(A \xrightarrow{f} R) = \varphi\circ f \mid R \in k\text{-}Alg\right)$$

ולכן

$$\begin{tikzcd} Hom_k(A,R) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "\theta_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Hom_k(B,R) \arrow[d, "\theta_*"] \\ Hom_k(A,S) \arrow[r, "\varphi^*"'] & Hom_k(A,S) \end{tikzcd}$$

לכל $\theta : R \to S$

כי $B \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{f} R \xrightarrow{\theta} S$

$$\theta(f\varphi) = (\theta f)\varphi$$

כיוון שני:

$$\Phi_A(Id_A) \longleftarrow\!\shortmid \; \Phi = (\Phi_R \mid R \in k\text{-Alg})$$

(כלומר, בהינתן העתקה טבעית Φ, מוצאים העתקה Φ_R לכל R k-אלגברה.
בפרט עבור $R=A$, מקבלים $\Phi_A : Hom_k(A,A) \to Hom_k(B,A)$ ולכן בפרט הומו'
מ- B ל- A : $\Phi_A(Id_A)$).

ועכשיו יש לבדוק שההתאמות הפוכות זו לזו (קל). □

מסקנה: ההעתקה $E \to F$ שקילות טבעית אמ"מ $A \to B$ איזומורפיזם.

שלוש עובדות על פונקטורים יציגים:

① אם $E : k\text{-Alg} \to \{*\}$ אז E מוצגת ע"י k.

② יהיו E ו- F פונקטורים יציגים, המוצגים ע"י k-אלגבראות A ו- B.
אז $(E \times F)(R) = E(R) \times F(R)$ יציג, ומוצג ע"י $A \otimes_k B$.

$$\forall R \in k\text{-Alg}, \quad
\begin{tikzcd}
Hom_k(A,R) \times Hom_k(B,R) \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr] & & Hom_k(A \otimes_k B, R) \\
& Hom_k(A \times B, R) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$(f,g) \mapsto \big((a,b) \mapsto f(a)g(b)\big)$$

③ אם G מונואיד ע״י C ונתונים העתקות טבעיות $E \to G$, $F \to G$

אז
$$\begin{tikzcd} PB \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & E(R) \arrow[d] \\ F(R) \arrow[r] & G(R) \end{tikzcd}$$
$R \longmapsto E \times_G F(R) :=$ מיוצג ע״י $A \otimes_C B$.

אלגבראות הופף

כעת נראה אילו אלגבראות מייצגות סכימות חבורה אפיניות. בנקודה כאן e אלו פונקטורים "ייצוגיים" לתוך הקטגוריה של חבורות ולעובדה זו משמעות באלגברה המייצגת.

חבורה

$$\mu : \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$$
$$e : \{*\} \times \Gamma \to \Gamma$$
$$i : \Gamma \to \Gamma$$

כך שהדיאגרמות הבאות קומוטטיביות

$$\begin{tikzcd} \Gamma \times \Gamma \times \Gamma \arrow[r, "id \times \mu"] \arrow[d, "\mu \times id"'] & \Gamma \times \Gamma \arrow[d, "\mu"] \\ \Gamma \times \Gamma \arrow[r, "\mu"'] & \Gamma \end{tikzcd}$$
(קיבוציות),

$$\begin{tikzcd} \{*\} \times \Gamma \arrow[r, "e \times id"] \arrow[dr, "pr_2"'] & \Gamma \times \Gamma \arrow[d, "\mu"] \\ & \Gamma \end{tikzcd}$$
(יחידה שמאלית),

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "(i, id)"] \arrow[d] & \Gamma \times \Gamma \arrow[d, "\mu"] \\ \{*\} \arrow[r, "e"'] & \Gamma \end{tikzcd}$$
(הפיך שמאלי)

אם $G: k\text{-Alg} \to \text{Groups}$ פונקטור ⇐ לכל $R \to S$ מורפיזם של k-אלגברות אז $G(R) \to G(S)$ הומומורפיזם של חבורות, כלומר

$$\begin{tikzcd} G(R) \times G(R) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G(R) \arrow[d] \\ G(S) \times G(S) \arrow[r, "\mu"] & G(S) \end{tikzcd}$$

אז זה בדיוק אומר ש- μ היא העתקה טבעית בין פונקטורים $G \times G \to G$.
באופן דומה i, e הן העתקות טבעיות. ולכן פונקטור לחבורות הוא פונקטור לקבוצות + 3 העתקות טבעיות μ, e, i.

אם G מיוצג ע"י A, אז $G \times G$ מיוצג ע"י $A \otimes_k A$, ולכן

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(G \times G, G) \xrightarrow[\sim]{\text{Yoneda}} \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, A \otimes_k A)$$

$$\mu \longmapsto \Delta$$ קו-כפל

באופן דומה

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(\{*\}, G) \xrightarrow[\sim]{\text{Yoneda}} \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, k)$$

$$e \longmapsto \varepsilon$$ קו-יחידה (אוגמנטציה)

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}}(G, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, A)$$

$$i \longmapsto S$$ קו-הפיך (אנטיפודה)

כך שהדיאגרמות

$$\begin{tikzcd} A & A\otimes_k A \arrow[l, "{(S,id)}"'] \\ k \arrow[u] & A \arrow[l, "\varepsilon"] \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd}$$

(העתקת המבנה)

$$\begin{tikzcd} k\otimes_k A & & A\otimes_k A \arrow[ll, "\varepsilon\otimes id"'] \\ & A \arrow[ul, "\sim"] \arrow[ur, "\Delta"'] & \end{tikzcd} \qquad a \longmapsto 1\otimes a$$

$$\begin{tikzcd} A\otimes_k A\otimes_k A & A\otimes_k A \arrow[l, "id\otimes\Delta"'] \\ A\otimes_k A \arrow[u, "\Delta\otimes id"] & A \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd}$$

מתקיימות. אלגברה A כזו נקראת אלגברת הופף (קומוטטיבית).

סכימות חבורה אפיניות $/k$ $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ אלגבראות הופף $/k$.

דוגמאות

① $\mathbb{G}_a$ החבורה האדיטיבית, מיוצגת ע"י $A = k[x]$.

$$\mathrm{Hom}_{Funct}(\mathbb{G}_a\times\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_a) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k\text{-}Alg}(k[x], k[x]\otimes_k k[x])$$

$$\mu = \text{"}+\text{"} \longmapsto \Delta$$

$$\mu : \mathrm{Hom}_k(A,R)\times\mathrm{Hom}_k(A,R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(A,R)$$

$$f: x\mapsto r \qquad g: x\mapsto s \qquad \longmapsto \qquad f+g : x\mapsto r+s$$

2|

$$\mathrm{Hom}_k(A\otimes_k A, R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(A,R)$$

צריך להתאים ל- $A \xleftarrow{\Delta} A\otimes_k A$ כך שלכל R ההרכבה $A \xrightarrow{\Delta} A\otimes_k A \xrightarrow{(f,g)} R$

נותנת $r+s = (f,g)\Delta(x)$. רואים ש- $\Delta(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x$ אשר

כמו להגיד איבר להיות ה-איבר.

באופן דומה, $A \xrightarrow{\varepsilon} k \to R$ צריכה לתת את 0 של R ולכן $\varepsilon(x)=0$.

וכן, אם $g(x)=r$, אז $A \xrightarrow{S} A \to R$ צריכה לתת את $-r$

ולכן $S(x) = -x$.

(2) $\mathbb{G}_m$: $A = k[x,x^{-1}]$, $\Delta(x) = x\otimes x$, $\varepsilon(x) = 1$, $S(x) = x^{-1}$.

לנוסחאות מפורשות: אם $\Delta(a) = \sum_i a_i \otimes b_i$

$$\sum_i \varepsilon(a_i) b_i = a \qquad (\varepsilon\otimes \mathrm{id})\circ\Delta = \mathrm{id}$$

$$\sum_i S(a_i) b_i = \varepsilon(a) \qquad (S,\mathrm{id})\circ\Delta = \varepsilon$$

: Sweedler

$$\Delta(a) = \sum a_{(1)}\otimes a_{(2)}$$

$$(\mathrm{id}\otimes\Delta)\Delta(a) = \sum a_{(1)}\otimes a_{(2)}\otimes a_{(3)}$$