הצגות

נתונים $G: k\text{-alg} \to \text{Groups}$

$X: k\text{-alg} \to \text{Sets}$

פעולה של G על X היא העתקה טבעית $G\times X \to X$ כך שההעתקות $G(R)\times X(R) \to X(R)$ הן פעולות של חבורה על קבוצה.

הצגה של G על X מתייחסת למקרה שבו $X(R)=V\otimes_k R$ כאשר V מודול נ"ס מעל k, וכאשר הפעולה היא R-לינארית.

$$G \to GL_V$$
$$\cong$$
$$G \to GL_n$$

העתקה טבעית
של k
פונקטורים.

דוגמאות

① $G_m \to GL_n$

$a \mapsto \mathrm{diag}(a^{n_1},\dots,a^{n_k})$

② $G_a \to GL_2$

③ $GL_2 \to GL_3$

קו-מודולים

משפט: תהי G סכימת חבורה אפינית המיוצגת ע"י A.
אז הצגות ליניאריות של G על V הן בהתאמה להעתקות k-ליניאריות
$\rho: V \to V\otimes A$ כך שהדיאגרמות הבאות מתחלפות

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & V\otimes A \arrow[d, "id\otimes\Delta"] \\ V\otimes A \arrow[r, "\rho\otimes id"] & V\otimes A\otimes A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, equal] & V\otimes A \arrow[d, "id\otimes\varepsilon"] \\ V \arrow[r, "\sim"] & V\otimes k \end{tikzcd}$$

הוכחה: תהי $\Phi: G \to GL_V$ הצגה. פירושו שיש לנו העתקה טבעית
כך שלכל $g: S \to R$ הדיאגרמה הבאה קומוטטיבית

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} Hom_k(A,S) \arrow[r, "\Phi_S"] \arrow[d, "g_*"'] & Hom_S(V\otimes S, V\otimes S)^{\times} \arrow[d] \\ Hom_k(A,R) \arrow[r, "\Phi_R"] & Hom_R(V\otimes R, V\otimes R)^{\times} \end{tikzcd}$$

בפרט נבחר $S=A$, נקבל

$$id_A \longmapsto \Phi_A(id_A): V\otimes A \longrightarrow V\otimes A$$

העתקה של A-מודולים. לכן, היא נקבעת ע"פ צמצומה ל- $V \simeq V\otimes_k k$

שסימנו ב- $\rho: V\to V\otimes A$ (כך מקבלים מ- Φ את ρ).

ניקח $g:A\to R$ כלשהו. אין הבדל בשקף דברים: כמורפיזם $A\xrightarrow{g}R$ אין

או כאפי להסתכל על ($\star$) וכאיבר ב- $G(R)$.

$$\begin{tikzcd}
V\otimes A \arrow[r, "\Phi_A(id_A)"] \arrow[d, "id\otimes g"'] & V\otimes A \arrow[d, "id\otimes g"] \\
V\otimes R \arrow[r, "\Phi_R(g)"'] & V\otimes R
\end{tikzcd}$$

מה שאומר ש- $\Phi_R(g)\big|_{V\otimes 1} = (id\otimes g)\circ\rho$, כלומר Φ נקבע ע"י ρ.

בכיוון שני, כל $\rho:V\to V\otimes A$ שהיא k-לינארית נותנת כך גם העתקה

טבעית (של קבוצות בינתיים) $\Phi: G(R)\to \mathrm{End}_R(V\otimes R)$.

כדי שזו תהיה הצגה צריך לבדוק שהתמונה הפיכה ו- $\Phi(gh)=\Phi(g)\Phi(h)$.

כלומר ש- $id\in G(R)$ תופס כמו הרגיל

$$\begin{tikzcd}
V\otimes A \arrow[r, "\Phi(id_A)"] \arrow[d] & V\otimes A \arrow[d, "id\otimes g"] \\
V\otimes R \arrow[r] & V\otimes R
\end{tikzcd}
\quad \overset{\text{שקולים}}{\underset{\text{ל-}V}{\sim}} \quad
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\iota"'] & V\otimes A \arrow[d, "id\otimes g"] \arrow[dl, dashed, "id\otimes\varepsilon"'] \\
V\otimes k \arrow[r] & V\otimes R
\end{tikzcd}$$

$g: A\xrightarrow{\varepsilon}k\xrightarrow{1}R$ היחידה ב- $G(R)$

$$\Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h)$$

$g\cdot h = A \xrightarrow{\Delta} A\otimes A \xrightarrow{(g,h)} R$ ולכן פעולת $\Phi(gh)$ על V הינו

$$① \quad V \xrightarrow{\rho} V\otimes A \xrightarrow{id\otimes\Delta} V\otimes A\otimes A \xrightarrow{id\otimes(g,h)} V\otimes R$$

פעולת $\Phi(g)\Phi(h)$

$$V \xrightarrow{\rho} V\otimes A \xrightarrow{id\otimes h} V\otimes R \xrightarrow{\rho\otimes id} V\otimes A\otimes R \xrightarrow{id\otimes(g,id)} V\otimes R$$

אך

$$② \quad V \xrightarrow{\rho} V\otimes A \xrightarrow{\rho\otimes id} V\otimes A\otimes A \xrightarrow{id\otimes(g,h)} V\otimes R$$

① ו-② מסכימים לכל g,h אחרים הכוונה מה השתמשנו במשפט מתקיים □

הגדרה: k-מודול V עם העתקה של k-מודולים $\rho: V\to V\otimes A$ המקיימת $(id\otimes\varepsilon)\rho = id$, $(id\otimes\Delta)\rho = (\rho\otimes id)\rho$ נקרא A-קו-מודול.

דוגמא: $V=A$, $\rho=\Delta$. זו הצגה הרגולרית של G.

⊕ סכום ישר של קו-מודולים מוגדר באופן טבעי.

⊗ גם מכפלה טנזורית: אם U, V קומודולים אז

$$U\otimes V \to U\otimes A\otimes V\otimes A \xrightarrow{\sim} U\otimes V\otimes A\otimes A \xrightarrow{id\otimes m} U\otimes V\otimes A$$

תת-קו-מודול: $W\subset V$ אם $\rho(W)\subseteq W\otimes A$

טענה: אם $W\subset V$ קומודול אז $V\to V\otimes A\to V/W\otimes A$

מתפרק דרך V/W ולכן ל-V/W יש מבנה מושרה של קו-מודול.

אם V חופשי מדרגה סופית מעל k עם בסיס $\{v_i\}$ ונכתוב

$$\rho(v_j)=\sum_i v_i\otimes a_{ij}$$

אז ה-a_{ij} הם תמונות המשתנים של X_{ij} תחת ההעתקה:

$$k[x_{ij}, d]/(\det(x_{ij})\cdot d-1) \longrightarrow A \qquad G\to GL_n$$

אם $\rho(v_j)=\sum v_i\otimes a_{ij}$ אז $\Delta(a_{ij})=\sum a_{il}\otimes a_{lj}$.