קשירות ואי פריקות

X קשיר $\iff X \neq Y_1 \dot\cup Y_2$

$\Uparrow$

X אי פריק $\iff X \neq Y_1 \cup Y_2$

(Y_1, Y_2 סגורות לא טריוויאליות)

מבחינה טופולוגית היות אי פריק אומר: כל פתוחה לא ריקה היא צפופה.

בפ"כ בטופולוגיה אוקלידית אין מלבד נקודות קבוצות אי פריקות. בטופולוגיית זריצקי יש שפע של כאלה.

דוגמא: $V(xy) \subset k^2$ קשירה אבל פריקה.

טענה: $X \subseteq k^n$ אי פריקה אמ"מ $k[X]$ תחום שלמות.

משפט: כל תת-קבוצה סגורה של k^n היא איחוד סופי לא מיותר של תת קבוצות אי פריקות סגורות (נקראות מרכיבי האי-פריקות של X).

מסקנה: אם $X \subseteq k^n$ אי פריקה אז גם $\overline{X}^L \subset L^n$ אי פריקה לכל L/k.

הוכחה: $k[\overline{X}^L] \cong k[X] \otimes_k L$.

משפט: אם U חבורה אלגברית אפינית מעל שדה k אז מרכיב הקשירות של $\{e\}$ שנסמנו U° הוא נורמלי ב-U, מאינדקס סופי, אי פריק וכל מרכיבי האי-פריקות של U הם הקוסטים $\{aU^\circ\}$.

סכמות אפיניות

גאומטריה	אלגברה
X	$k[X]$
מרחב טופ׳ ש- A חוג הפונקציות עליו	A חוג קומו׳ עם 1

כקבוצה: $\mathrm{Spec}\, A = \{ \mathfrak{p} \triangleleft A \mid \mathfrak{p}$ (אידיאל) ראשוני $\}$

טופולוגיה (זריצקי): $Z(I) = \{ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A \mid \mathfrak{p} \supseteq I \}$ (סגורות)

תרגיל: $X \subseteq k^n$ סגורה, $A = k[X] = k[x_1, \dots, x_n]/I(X)$ ותהי

$$\varphi : X \longrightarrow \mathrm{Spec}\, k[X]$$
$$a \longmapsto m_a \bmod I(X)$$

1. φ הומיאומורפיזם על תמונתה.
2. $\varphi(X)$ צפופה.
3. לכן $\mathrm{Spec}\, A$ אי-פריקה $\Longleftrightarrow$ X אי-פריקה
4. $\mathrm{Spec}\, A$ קשיר $\Longrightarrow$ X קשיר.

הערות: ① יש לנו שיכון $X \simeq$ max ideals in $k[X]$ $\hookrightarrow$ prime ideals in $k[X]$
אם סגור k

הטופולוגיה של המקסימליים היא המצומצמת של הטופולוגיה על הראשוניים, כי

קבוצה סגורה = אפסים משותפים של $f \in J$

= ראשוניים של האפסים בקבוצה

= אידיאלים מקסימליים $\supseteq J$.

② אם $X \supseteq Z(J)$ אז לכל $f \in J$ $f|_X \equiv 0$ ולכן $J = \{0\}$ כלומר

הסגירה הטופולוגית של X היא כל $\operatorname{Spec} A$.

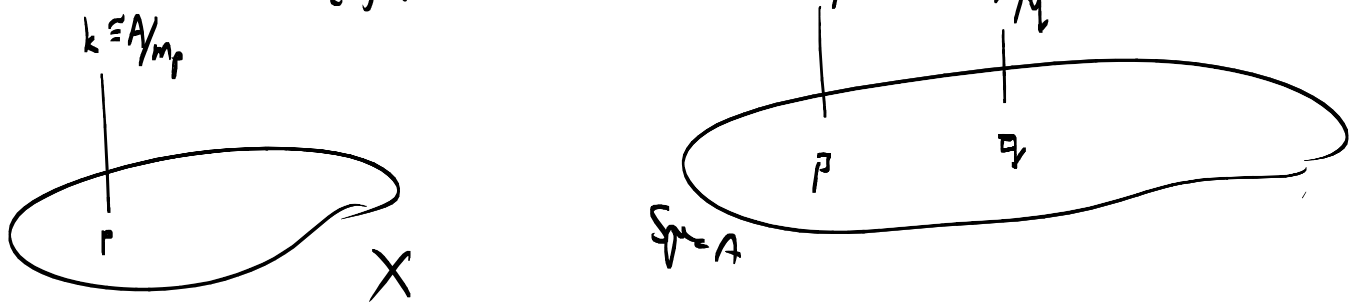
③ נובע מכך ש- X צפופה ב- $\operatorname{Spec} A$.

④ אם X לא פריק אז $X = Y_1 \dot\cup Y_2$ והסגור של Y_i ב- $\operatorname{Spec} A$

נותן פירוק של $\operatorname{Spec} A$ לסגורות זרות. □

הערה: אפשר לחשוב על A כעל פונקציות על $\operatorname{Spec} A$

בדומה ל-



$f(x) = f \bmod I(x) \in k$ $\qquad$ $f(\mathfrak{p}) = f \bmod \mathfrak{p} \in A/\mathfrak{p}$

$0 \neq f \in A$ יכולה להיות פונקציית האפס אמ"מ $f \in \bigcap_{p \in \operatorname{Spec} A} p$

אמ"מ f נילפוטנטי (תזכורת: $\sqrt{0_A} = \bigcap p$)

<u>מסקנה</u>: (א) $\operatorname{Spec} A$ אי פריק $\iff$ $A/\sqrt{0_A}$ תחום שלמות

(ב) אם A נתרי אז $\operatorname{Spec} A$ הוא איחוד של מספר סופי
של קבוצות אי-פריקות סגורות מקסימליות.

<u>דוגמא</u>: אם $k = \mathbb{R}$,

$$f = x^2 + y^2 - 1$$
$$g = (x-4)^2 + y^2 + 1$$

אז $X = V(fg)$ היא איחוד של שני סגורים (שהן אי-פריקים).
הסגור שלהן ב-$\mathbb{C}$ עדיין אי פריק אבל הן כבר לא זרות

$$(2, \sqrt{-3}) \in \bar{X}^{\mathbb{C}}$$

אבל $\mathbb{R}[X]$ כבר "יודע" על הנקודות של החיתוך הזה: אין פונקציה φ
כך ש- $\varphi|_{V(f)} = 1$ ו- $\varphi|_{V(g)} = 0$.

קריטריון אלגברי לקשירות

משפט: האידמפוטנטים ב- A הם בהתאמה חח"ע לקבוצות פתוחות-סגורות ב- $\operatorname{Spec} A$.

הוכחה: נניח ש- $e^2=e\in A$. אז $\phi = Z(e)\cap Z(1-e)$ (כי כל ראשוני שיכיל את שניהם יכיל גם את 1). מצד שני האיחוד הוא כל $\operatorname{Spec}A$ כי לכל ראשוני $\mathfrak{p}$, $e(1-e)=0\in\mathfrak{p}$. לכן הן פתוחות וסגורות.

נניח ש- $Z(e)=Z(f)$. אז $\operatorname{Spec}A = Z(f(1-e))$ ולכן $f(1-e)$ נילפוטנטי, אבל גם אידמפוטנטי. לכן $f(1-e)=0$ כלומר $f=fe$. ובאופן דומה $e=ef$ ולכן $f=e$.

קיבלנו שיכון $\{\text{אידמפוטנטים}\}\longrightarrow\{\text{סגורות-פתוחות}\}$. נראה שהוא על.

תהי $Z(I)$ פתוחה, אם משלים סגור $Z(J)$. אז $\phi = Z(I+J)$, ולכן $I+J=A$. נכתוב $b+c=1$, $b\in I, c\in J$.

בנוסף ש- $\operatorname{Spec}A = Z(I)\cup Z(J) = Z(IJ)$ נקבל ש- bc נילפוטנטי, נניח $(bc)^n=0$.

אם $b^n\in\mathfrak{p}$ אז $b\in\mathfrak{p}$ ולכן אין ראשוני, בפרט מקסימלי, שמכיל גם את b^n וגם את c^n, ולכן יש $u,v\in A$ כך ש- $1=ub^n+vc^n$.

מתקיים $Z(ub^n)\supseteq Z(I)$, $Z(vc^n)\supseteq Z(J)$ ו- $\phi = Z(vc^n)\cap Z(ub^n)$

ומכאן $Z(ub^n) = Z(I)$. אבל $ub^n = ub^n(ub^n + cb^n) = (ub^n)^2$

כלומר, אידמפוטנט. $\blacksquare$

מסקנה: $\operatorname{Spec}A$ קשיר $\iff$ ל-A אין אידמפוטנטים $\neq 0,1$.

משפט: אם A נתרי יש לו מספר סופי של אידמפוטנטים.

מסקנה: נניח ש-A אלגברה נוצרת סופית מעל שדה. אם T אוסף האידיאלים המקסימליים אז $\operatorname{Spec}A$ קשיר $\iff$ T קשיר.

הוכחה: ממשפט האפסים של הילברט

$$\sqrt{0_A} = \bigcap_{p \trianglelefteq A \text{ ראשוני}} p = \bigcap_{m \trianglelefteq A \text{ מקסימלי}} m .$$

אם עוברים על הוכחת המשפט עבור T במקום $\operatorname{Spec}A$ מייצרים אידמפוטנטים ב-A לפי פתיחה-סגירה ב-T.

מסקנה: יהי k שדה סגור אלגברית, $X \subseteq k^n$ סגורה. אז X קשיר $\iff$ $\operatorname{Spec}(k[X])$ קשיר.

הוכחה: $T = X$ במסקנה הקודמת.